ÜBER

GEOMETRISCHE AUFGABEN

DRITTEN UND VIERTEN GRADES.

ZWEI ABHANDLUNGEN

AUS DEM GEBIETE DER NEUEREN GEOMETRIE

VON

DR. HERMANN KORTUM,

PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT BONN.

IM JAHRE 1868 MIT DEM STEINER'SCHEN PREISE GEKRÖNT.

BONN,

EDUARD WEBER'S BUCHHANDLUNG.

(R. Weber & M. Hochgürtel.)

1869.

HERRN

PROF. RUDOLPH LIPSCHITZ,

SEINEM LEHRER UND FREUNDE,

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

Vorwort.

Die nachfolgenden beiden Abhandlungen sind ein bis auf stylistische Kleinigkeiten unveränderter Abdruck der Bewerbungsschrift um den Steiner'schen Preis, welche ich im Jahre 1868 der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin unter dem aus Newton's »Arithmetica universalis« genommenen Motto

»Est itaque arithmetice quidem simplicius, quod per simpliciores aequationes determinatur, at geometrice simplicius est, quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; et in geometria prius et praestantius esse debet, quod est ratione geometrica simplicius«

überschickt habe. Die Königliche Akademie hat denselben zusammen mit einer Schrift von Herrn Henry John Stephen Smith, Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford, jenen Preis zuerkannt. Die gestellte Aufgabe lautete:

»Für diejenigen geometrischen Probleme, deren algebraische Lösung von Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade abhängt, fehlt es noch an der Feststellung der zur constructiven Lösung derselben erforderlichen und ausreichenden fundamentalen Hilfsmittel, so wie an den Methoden zur systematischen Benutzung dieser Hilfsmittel.

Indem die Akademie die Frage, die sie stellt, auf die Probleme beschränkt, welche auf kubische Gleichungen führen, wünscht sie, dass wenigstens an einer Anzahl von speciellen Beispielen gezeigt werde, wie diese Lücke in dem Gebiete der constructiven Geometrie ausgefüllt werden könne. Namentlich verlangt sie die vollständige Lösung des folgenden Problems:

Wenn dreizehn Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von sechszehn Durchschnittspunkten zweier Curven vierten Grades bilden.

Bei der Lösung sind die Fälle zu berücksichtigen, in welchen einige der dreizehn Punkte imaginär und demgemäss nicht als individuelle Punkte, sondern als Durchschnittspunkte vorgelegter Curven gegeben sind. Gewünscht wird ferner, dass sämmtliche geometrische Constructionen durch die entsprechenden algebraischen Operationen erläutert werden.«

Demgemäss ist in der ersten Abhandlung gezeigt, wie man diejenigen geometrischen Aufgaben, welche bei algebraischer Auffassung auf Gleichungen dritten und vierten Grades führen, mit den Hülfsmitteln der Elementar-Geometrie construiren könne, wenn ausserdem noch irgend ein eigentlicher Kegelschnitt gezeichnet vorliegt. Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit jenem Problem über Curven vierten Grades und einigen verwandten Aufgaben.

H. Kortum.

Erste Abhandlung.

Construction der geometrischen Aufgaben des dritten und vierten Grades vermittelst des Lineals, des Zirkels und eines ein für allemal gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes.

Es ist bekannt, dass man geometrische Aufgaben, welche bei analytischer Behandlung die Auflösung einer oder mehrerer Gleichungen dritten oder vierten Grades erfordern, nicht mit alleiniger Hülfe der drei Euklideischen Postulate oder kürzer des Zirkels und Lineals construiren könne. Man muss vom Kreise verschiedene Kegelschnitte zu Hülfe nehmen und zwar hat man ebenso oft die gemeinsamen Punkte zweier durch irgend welche Bedingungen eindeutig bestimmten Kegelschnitte aufzusuchen, als bei analytischer Auffassung der betreffenden Aufgabe Gleichungen des dritten oder vierten Grades auftreten. Die Anwendung von der Elementar-Geometrie fremden Hülfsmitteln bei der Construction solcher Aufgaben wäre nun auf ein Minimum reducirt, wenn bewiesen werden könnte, dass man, so oft die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu finden sind, den einen durch einen Kreis, den andern aber durch einen ein für allemal gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt ersetzen kann. Natürlich müssen sich die zu dieser Ersetzung nöthigen Operationen mit Zirkel und Lineal ausführen lassen. Ein solcher Beweis soll in Folgendem geliefert werden, und zwar dadurch, dass

die fragliche Ersetzung in einer möglichst einfachen Weise durch Construction wirklich ausgeführt wird.

Da die beiden Kegelschnitte, deren gemeinsame Punkte zu finden sind, als durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig gegeben angenommen werden müssen, so kann man immer für einen jeden von ihnen fünf ihn bestimmende Punkte construiren und diese Punkte dann an Stelle der früheren den Kegelschnitt definirenden Bedingungen setzen. Es ist also erlaubt, von jetzt ab jeden der beiden Kegelschnitte als durch fünf Punkte, und zwar, da unter den Bestimmungsstücken etwa auftretende Paare von conjugirt imaginären Punkten durch reelle ersetzt werden können, als durch fünf reelle Punkte gegeben anzusehen und man kann die zu lösende Aufgabe folgendermassen aussprechen:

*Wenn ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt A und zwei Gruppen a b c d e und a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 von je fünf Punkten gegeben sind, so sollen die Schnittpunkte der durch diese Gruppen bestimmten Kegelschnitte K und K_1 mit Hülfe des Lineals, des Zirkels und des ein für allemal gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes A gefunden werden**).

---

*) Ich habe absichtlich dem Problem diese Fassung gegeben, statt zu zeigen, wie man durch Anwendung der gegebenen Hülfsmittel die Wurzeln einer Gleichung dritten oder vierten Grades construiren könne. Denn die rein geometrische Behandlung einer Aufgabe dritten oder vierten Grades wird nicht zu einer solchen Gleichung, sondern immer und mehr oder weniger direct auf die Aufsuchung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte führen. Uebrigens ist das Problem schon von Newton in der andern Fassung gelöst. (Vgl. Arithmetica universalis, ed. s'Gravesande 1732, pag. 239.) Zwar behandelt Newton nur Gleichungen dritten Grades, allein es lassen sich die Gleichungen vierten Grades nicht nur analytisch auf die des dritten zurückführen, sondern es fordert auch die constructive Ausführung dieser Reduction, sowie die schliessliche Auffindung der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung vermittelst der schon construirten Wurzeln der Resolventen nur Operationen, die mit Zirkel

Die hier gegebene Lösung dieser Aufgabe zerfällt in zwei Abtheilungen. In der ersten wird die Construction der etwa vorhandenen reellen gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte K und K_1 entwickelt. Zeigt sich nun bei dieser Construction, dass die Kegelschnitte kein oder ein Paar conjugirt imaginäre (durch eine gemeinsame Polar-Involution auf einer sogenannten Chordalen vertretene) Schnittpunkte besitzen, so ist die Aufgabe als vollständig gelöst zu betrachten, denn im zweiten Falle kann das imaginäre Paar von Schnittpunkten (also die Chordale in Verbindung mit der gemeinsamen Polarinvolution) mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln gefunden werden, nachdem die beiden reellen gemeinsamen Punkte bekannt sind. Ergiebt sich aber, dass kein reeller Schnittpunkt vorhanden ist, so erfordert, wie man sehen wird, die Construction der beiden Paare imaginärer Schnittpunkte ein besonderes Verfahren, und dieses wird in der zweiten Abtheilung auseinandergesetzt.

Erste Abtheilung.

Construction der etwa vorhandenen reellen gemeinsamen Punkte der beiden Kegelschnitte $K = (a\,b\,c\,d\,e)$ und $K_1 = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1)$.

Die bei dieser Construction zu befolgende Methode bietet eine gewisse Analogie zu derjenigen, welche Steiner in seiner Schrift »Die geometrischen Constructionen ausgeführt vermittelst des Lineals und eines festen Kreises« in Anwendung gebracht hat. Wie hier, so kommt auch bei Steiner Alles auf eine Hauptaufgabe hinaus, nämlich mit Hülfe des Lineals und eines festen Kreises die etwa vorhandenen gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines durch seinen Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie gegebenen Kreises zu finden*).

---

und Lineal ausgeführt werden können; eine in geometrischer Hinsicht wesentliche Bemerkung, die Newton übergangen hat.

*) Vgl. pag. 2 der angeführten Schrift.

Steiner reducirt diese Aufgabe vermittelst einer geometrischen Verwandtschaft ganz specieller Art, der Aehnlichkeit, auf die andere, die Schnittpunkte einer Geraden mit dem festen Kreise zu construiren*). Hier soll eine allgemeinere Verwandtschaft, die Collineation, dazu benutzt werden, die vorliegende Aufgabe auf die Construction der Schnittpunkte eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnittes mit dem festen zurückzuführen. Damit aber hört die Analogie auf, denn Steiner ist nach jener Reduction fertig, während hier die übrigbleibende Aufgabe die eigentlichen Schwierigkeiten bietet. Bei Darstellung der ganzen Auflösung soll der analytische Gang eingehalten werden und demnach beginnen wir mit jener Zurückführung.

Wie schon gesagt, wird die Zurückführung bewerkstelligt vermittelst der geometrischen Verwandtschaft der Collineation. Bei Einführung einer geometrischen Verwandtschaft gewährt es eine bequeme Anschauung der Sache, wenn man sich das Constructions-Feld als aus zwei aufeinander liegenden Ebenen zusammengesetzt vorstellt; alle Punkte, Linien etc. auf jeder dieser Ebenen fasst man dann unter dem Namen eines »Systems« zusammen und nennt diese Systeme verwandt. Hier sind die Systeme speciell collinear, sie sollen S und S' genannt und es sollen irgend zwei einander entsprechende Punkte, Linien etc. mit demselben Buchstaben bezeichnet werden, welcher im System S' noch mit einem Accent versehen wird**).

---

*) Vgl. pag. 78 der angeführten Schrift.

**) Dieselbe Vorstellungs- und Bezeichnungsweise soll auch später angewandt werden, so oft Verwandtschaften auftreten.

Ferner sollen hier zur künftigen Vermeidung von Unterbrechungen und zur Verständigung über die in diesen Dingen sehr schwankende Terminologie von den Eigenschaften collinearer Systeme die wenigen kurz zusammengefasst werden, welche später zur Anwendung kommen und nicht in jeder Darstellung dieses Gegenstandes zu finden sind.

Könnte man nun die Systeme S und S' so annehmen, dass dem Kegelschnitt K als einem Theil von S in S' der feste Kegelschnitt A entspräche, so wäre die fragliche Zurückführung bewirkt. Denn alsdann brauchte man, um die Schnitte

---

Auf irgend zweien in collinearen Systemen S und S' einander entsprechenden Kegelschnitten K und K' bestimmt die collineare Beziehung projectivische Punktreihen. Umgekehrt bestimmen auch irgend zwei projectivisch auf einander bezogene Kegelschnitte KK' collineare Systeme, deren Theile sie sind. Denn entsprechen in der projectivischen Beziehung den Punkten $a\ b\ c\ d$ von K auf K' die Punkte $a'\ b'\ c'\ d'$, so bestimmen zunächst die vier Paare von Punkten aa', bb', cc', dd' zwei collineare Systeme, S und S'. In diesen Systemen müssen aber auch die Kegelschnitte K und K' zu einander gehören. Denn sind $p\ p'$ zwei einander entsprechende Punkte, und liegt p auf K, so ist wegen der collinearen Beziehung zunächst die Gruppe der Strahlen $p'\ a'$, $p'\ b'$, $p'\ c'$, $p'\ d'$ projectivisch zur Gruppe pa, pb, pc, pd; da aber andererseits die Gruppe der Punkte $a\ b\ c\ d$ auf K projectivisch zur Gruppe $a'\ b'\ c'\ d'$ auf K' ist, so enthält der Kegelschnitt K' alle Punkte, deren Verbindungslinien mit $a'\ b'\ c'\ d'$ eine zu pa, pb, pc, pd projectivische Gruppe bilden, mithin muss p' auf K' liegen und es ist K' der dem Kegelschnitt K von S entsprechende Kegelschnitt in S'. Endlich fallen selbstverständlich die von den Systemen S und S' auf K und K' bestimmten projectivischen Punktreihen mit den gegebenen zusammen.

An diesen Resultaten ändert sich nichts, wenn der Kegelschnitt K mit seinem entsprechenden K' zur Deckung kommt, oder, wie man sagen kann, wenn K sich selbst entspricht. Alsdann hat man es mit zwei projectivischen Punktreihen auf demselben Kegelschnitt zu thun. Wenn diese eine Involution bilden, so gehen alle Verbindungslinien je zweier einander entsprechender Punkte durch denselben Punkt und Gleiches gilt für die von den projectivischen Punktreihen bestimmten collinearen Systeme. Die Systeme heissen in diesem Falle „collinear liegend“, jener Punkt aber heisst „Collineations-Centrum“. Gleichzeitig liegen bekanntlich die Schnittpunkte aller Paare von einander entsprechenden Geraden auf derselben Geraden, der „Collineations-Axe“. Da die Tangenten in zwei einander entsprechenden Punkten des Kegelschnitts $K = K'$ ebenfalls einander entsprechen, so ist hier die Collineations-Axe Polare des Col-

von K und K' zu finden, nur zu den Punkten $a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1$ des Systems S die entsprechenden $a_1'\ b_1'\ c_1'\ d_1'\ e_1'$ in S' zu suchen, diese würden einen neuen dem K_1 entsprechenden Kegelschnitt K_1' definiren, zu seinen Schnitten mit $A = K'$ als Punkten des Systems S' würde man die entsprechenden

---

lineations-Centrums in Bezug auf K. Ferner entsprechen sich hier je zwei in den Systemen S und S' zu einander gehörige Punkte wechselweise, d. h. die Systeme „liegen involutorisch". Die der unendlich fernen Geraden des einen Systems im andern entsprechende Gerade heisst „Gegenaxe" dieses letztern Systems. Bei collinear liegenden Systemen sind natürlich die Gegenaxen zur Collineations-Axe parallel und bei involutorisch liegenden fallen sie zusammen. Entspricht bei zwei collinearen Systemen die unendlich ferne Gerade sich selbst, so heissen sie „affin". Irgend zweien parallelen Geraden in einem von zwei affinen Systemen entsprechen also immer zwei parallele Gerade im andern. Aehnliche und congruente Systeme sind specielle Fälle der affinen. Auch von affinen Systemen kann man die Ausdrücke collinear und involutorisch liegend, Collineations-Axe und -Centrum gebrauchen. Der letztere Punkt liegt aber bei eigentlich affinen und collinear liegenden Systemen stets unendlich weit, d. h. die Verbindungslinien aller Paare von je zwei einander entsprechenden Punkten haben gleiche Richtung. Nur wenn die Systeme in ähnliche und congruente degeneriren, kann der Punkt auch im Endlichen liegen und heisst alsdann Aehnlichkeitspunkt. Aus collinearen und collinear liegenden Systemen werden affine und collinear liegende, wenn man die ersteren so projicirt, dass das Collineations-Centrum in's Unendliche fällt. Projicirt man dagegen die Collineations-Axe in's Unendliche, so entstehen speciell ähnliche oder congruente Systeme. Bei affinen collinear und involutorisch liegenden Systemen, welche durch eine Involution auf einem Kegelschnitt bestimmt werden, ist die Collineations-Axe immer ein Durchmesser des Kegelschnitts, während das Collineations-Centrum in der zu diesem Durchmesser conjugirten Richtung unendlich weit liegt.

Hinsichtlich der Terminologie habe ich mich an Möbius (Barycentrischer Calcül) und Magnus (Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen) gehalten, nur der Ausdruck „involutorisch" rührt von v. Staudt her.

Punkte in S construiren und diese wären die gesuchten. Zwei Systeme der verlangten Art erhält man aber auf folgende Weise:

Zu den Punkten $a\,b\,c$ von S nehme man die entsprechenden $a'\,b'\,c'$ von S' auf dem Kegelschnitt A beliebig an. Alsdann ziehe man die Verbindungslinien ea, eb, ec, ed und verbinde ausserdem einen auf A beliebig angenommenen Punkt p mit den Punkten $a'\,b'\,c'$. Die Strahlbüschel um die Punkte e und p' beziehe man projectivisch so aufeinander, dass den Strahlen ea, eb, ec resp. die Strahlen $p'\,a'$, $p'\,b'$, $p'\,c'$ entsprechen und suche den bei dieser projectivischen Beziehung zu $e\,d$ gehörigen Strahl von p'. Endlich vervollständige man die collineare Beziehung zwischen S und S' dadurch, dass man den zweiten Schnitt d' dieses Strahles von p' mit dem Kegelschnitt A dem Punkte d entsprechen lässt.

Da in der von den drei Paaren aa', bb', cc' bestimmten projectivischen Beziehung zwischen den Kegelschnitten K und A die Punkte d und d' einander entsprechen, so folgt, dass in den gefundenen collinearen Systemen wirklich zum Kegelschnitt K von S in S' der A gehört.

Alle bei der beschriebenen Zurückführung vorkommenden Constructionen können im Allgemeinen, d. h. wenn nicht zufälligerweise an die Stelle der Verbindungslinien zweier Punkte eine Parallele tritt, mit dem Lineal ausgeführt werden; ebenso bedarf es zur Auffindung der verlangten Schnitte von K und K_1 aus den Schnitten von A mit K'_1 nur des Lineals. Denn um die Systeme S und S' zu finden, hat man nur, wenn die projectivische Beziehung zweier Strahlbüschel in derselben Ebene durch drei Paare einander entsprechender Strahlen gegeben ist, zu einem ebenfalls gegebenen Strahl des einen im andern den zugehörigen zu suchen und auf eben diese Aufgabe lässt sich auch die Bestimmung des einem gegebenen Punkte des Systems S oder S' in S' resp. S entsprechenden Punktes zurückführen, da die collineare

Beziehung zwischen S und S' durch vier Paare einander entsprechender Punkte definirt ist.

Bezeichnet man nun der Einfachheit wegen den Kegelschnitt K'_1 wieder mit K und die Punkte $a'_1 \ldots e'_1$ mit $a \ldots e$, so kommt jetzt Alles hinaus auf die Lösung der folgenden Aufgabe:

Mit Hülfe des Lineals und Zirkels die Schnitte eines durch fünf Punkte a b c d e gegebenen Kegelschnitts K mit einem gezeichnet vorliegenden andern Kegelschnitt A zu finden.

In der Lösung dieser Aufgabe concentriren sich die Hauptschwierigkeiten des ganzen Problems, sie bildet den eigentlichen Kern dieser Abhandlung.

Die beiden Kegelschnitte A und K bestimmen einen Kegelschnittbüschel B $(A\,K)$, dessen sämmtliche Curven dem A in denselben Punkten begegnen. Enthielte nun dieser Büschel einen Kreis, so würde die Lösung der Aufgabe nur noch die Construction dieses Kreises erfordern. Im Allgemeinen wird aber der Büschel keinen Kreis enthalten. Daher fragt sich, ob es nicht collineare Systeme S und S' giebt, in denen der A sich selbst entspricht, während zu K als einem Theil von S in S' ein Kegelschnitt K' gehört, so, dass nun der Büschel B $(A\,K')$ einen Kreis enthält. Vermittelst dieses Kreises könnten dann zunächst die Schnitte von A mit K' und dann vermittelst der Verwandtschaft die gesuchten Punkte construirt werden.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass B $(A\,K')$ einen Kreis enthalte, besteht nun darin, dass der die Mittelpunkte aller Curven dieses Büschels enthaltende Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist*). Dies gilt auch

*) Vgl. Steiner „Auflösung einer geometrischen Aufgabe", Journal für Mathematik, B. 2, pag. 64. Dort ist übrigens nur von Kegelschnitt-Büscheln mit vier reellen sogenannten Grundpunkten und vom allgemeinen Falle der dem Kreise am nächsten kommenden Ellipse die Rede. Sehr vollständig finden sich alle hier gebrauchten auf den Mittelpunktskegelschnitt eines Büschels Bezug habenden

noch in den Fällen, wo der (immer als Ort der Pole der unendlich fernen Geraden des Büschels betrachtete) Mittelpunktskegelschnitt in zwei Gerade zerfällt *), von denen keine unendlich weit liegt; diese Geraden sind senkrecht zu einander, wenn der Büschel einen Kreis enthält und umgekehrt wird letzteres der Fall sein, wenn die Geraden senkrecht zu einander sind. Wenn dagegen die unendlich ferne Gerade einen Theil des Mittelpunkts-Kegelschnitts ausmacht, wird jene Behauptung illusorisch; dies tritt nur dann ein, wenn die beiden Kegelschnitte A und K auf der unendlich fernen Geraden dieselbe Polar-Involution bestimmen oder diese Gerade in demselben Punkte berühren; dieser Fall aber, dessen Vorhandensein die zu entwickelnde Construction übrigens selbst anzeigt, ist auszuschliessen, da er die Ordnung des Problems erniedrigt.

Es wird also die Verwandtschaft zwischen den Systemen S und S' ausserdem, dass sie den Kegelschnitt A in sich

---

Sätze im zweiten, von Herrn Schröter bearbeiteten, Bande von Steiner's Vorlesungen pag. 318 ff. Uebrigens ist die Behauptung im Text streng genommen nur dann richtig, wenn man auch imaginäre Kreise zulässt. Der rein geometrische Charakter der Darstellung wird dadurch nicht beeinträchtigt, sobald man, wie hier geschehen soll, die Kegelschnitte nach v. Staudt's Vorgang (vergl. Geometrie der Lage pag. 137 ff.) als „Ordnungscurven" von „Polarsystemen" (reciproke und reciprok liegende Systeme, Involutions-Netze) auffasst und unter einem imaginären Kegelschnitt ein solches System ohne Ordnungscurve versteht. Die hier zur Anwendung kommenden Sätze finden sich auf Grundlage dieser Auffassungsweise der Kegelschnitte im vierten Abschnitt des zweiten Bandes der Steiner'schen Vorlesungen bewiesen.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man unter A immer einen reellen Kegelschnitt zu verstehen hat, und dass ebenso die Punkte $a \dots e$ als durchaus reell angenommen werden, so dass nicht einmal zwei von ihnen conjugirt imaginär sind.

*) Wenn die Kegelschnitte A und K' einander doppelt berühren oder vierpunktig osculiren, oder wenn der Büschel AK' zwei Parallelen enthält. Vergl. übrigens Steiner, Vorlesungen, B. 2, pag. 323 und 363.

selbst verwandelt, noch bewirken müssen, dass der Mittelpunkts-Kegelschnitt von B (AK') eine gleichseitige Hyperbel wird. Dies sind die einzigen dieser Verwandtschaft aufzuerlegenden Bedingungen. Congruenz und Aehnlichkeit sind die einfachsten Arten der collinearen Verwandtschaft; dass man mit diesen hier nichts ausrichtet, ist klar. Der Aehnlichkeit am nächsten steht die Affinität, es ist also zu untersuchen, ob man mit einer solchen jenen beiden Bedingungen genügen kann. Entsprechen in affinen Systemen zwei Kegelschnitte einander, so entsprechen sich auch ihre Mittelpunkte als Pole der sich selbst entsprechenden unendlich fernen Geraden. Sind demnach die Systeme S und S', in denen der A sich selbst, der K aber dem K' entspricht, affin, so werden auch die Mittelpunkts-Kegelschnitte M und M' der beiden Büschel einander entsprechen. Da ferner in zwei affinen Systemen einer Ellipse, Parabel, Hyperbel wieder eine Ellipse, Parabel, Hyperbel entspricht, so muss, damit M' Hyperbel werde, vor allem M Hyperbel sein, oder, es müssen die von A und K auf der unendlich fernen Geraden bestimmten Polar-Involutionen ein reelles Paar, dessen Punkte nicht zusammenfallen, gemeinsam haben. Ist nun A Ellipse, so ist dies immer der Fall. Ist A Hyperbel, so geht die zu A gehörige Polar-Involution auf der unendlich fernen Geraden über in den Grenzfall eines Punktes dieser Geraden, dem successive alle Punkte zugeordnet werden*), und alsdann tritt eine Ausnahme ein, wenn K Hyperbel ist und jenen Punkt enthält. Ist endlich A Hyperbel, so werden beide Polar-Involutionen ein Doppelpaar gemeinsam haben, wenn K Parabel ist oder Hyperbel und mit A einen unendlich fernen Punkt gemeinsam hat; sie werden gar kein (reelles) Paar gemeinsam haben, wenn K Hyperbel ist und seine unendlich fernen Punkte die von A trennen. Der Fall der

*) Bei Steiner, Vorlesungen, B. 2, pag. 53, „parabolisches Punktsystem" genannt.

Identität beider Polar-Involutionen ist schon früher ausgeschlossen worden.

Soll demnach die angewandte Verwandtschaft eine Affinität sein, so sind folgende Fälle auszuschliessen:

1) *A* ist Parabel und *K* Hyperbel mit einer zur Axe der *A* parallelen oder in diese Axe fallenden Asymptote.

2) *A* ist Hyperbel und *K* Parabel mit zu einer Asymptote von *A* paralleler Axenrichtung.

3) *A* ist Hyperbel, *K* ebenfalls und es ist eine Asymptote von *K* zu einer Asymptote von *A* parallel.

4) *A* ist Hyperbel, *K* ebenfalls und es trennen sich zwei durch irgend einen Punkt zu den Asymptoten von *A* und *K* parallel gezogene Strahlenpaare.

Da der Kegelschnitt *K* durch fünf Punkte gegeben ist, so weiss man, falls *A* Parabel oder Hyperbel, von vornherein nicht, ob einer der eben aufgezählten Fälle eintreten wird. Hierzu ist die Aufsuchung des Mittelpunktes von *K* und seiner Polar-Involution nöthig; dies hat jedoch in sofern nichts zu sagen, als diese übrigens mit Zirkel und Lineal nach bekannten Methoden auszuführenden Operationen sich in der Folge als ohnehin nöthig herausstellen werden.

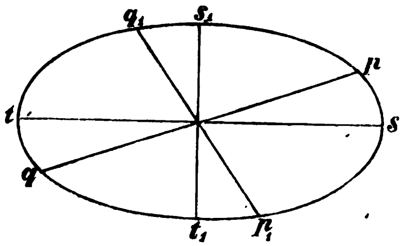
Die ausgeschlossenen Fälle sollen später behandelt werden, so dass man jetzt voraussetzen kann, *M* sei Hyperbel*). Ferner sollen der grösseren Uebersichtlichkeit halber von jetzt ab die Fälle, wo *A* Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, getrennt behandelt werden, obgleich zwischen ihnen die grösste Analogie herrscht.

I. *A* sei Ellipse.

Die Asymptoten von *M* sind zweien conjugirten Durchmessern pq und $p_1 q_1$ (vgl. die umstehende Figur) von *A*

---

*) Schon hier leuchtet ein, dass man für den festen Hülfskegelschnitt *A* am besten eine Ellipse nimmt, da alsdann jede Absonderung einzelner Fälle unnöthig wird.



parallel. Die Asymptoten von M' sollen senkrecht aufeinanderstehen, sie müssen also den Hauptaxen $s\,t$ und $s_1\,t_1$ von A parallel werden. Nun entsprechen in affinen Systemen die Asymptoten sich entsprechender Hyperbeln einander ebenfalls; ferner gehören zu irgend zwei parallelen Geraden des einen Systems im andern wieder parallele Gerade. Demnach müssen in den projectivischen Punktreihen auf A, welche die affinen Systeme S und S' definiren, den Punktpaaren $p\,q$, $p_1\,q_1$ die Paare $s\,t$, $s_1\,t_1$ in einer oder der andern Ordnung entsprechen. Da nun sowohl die Paare $p\,q$, $p_1\,q_1$ als auch $s\,t$, $s_1\,t_1$ sich als Endpunkte conjugirter Durchmesser harmonisch trennen, so giebt es im Ganzen acht projectivische Beziehungen zwischen den Punkten von A, welche diese Bedingung erfüllen, es können nämlich die Punkte $s\,t$, $s_1\,t_1$ in acht verschiedenen Anordnungen:

$s\,t,\ s_1\,t_1$		$t\,s,\ s_1\,t_1$
$t\,s,\ t_1\,s_1$	und	$s\,t,\ t_1\,s_1$
$s_1\,t_1,\ s\,t$		$s_1\,t_1,\ t\,s$
$t_1\,s_1,\ t\,s$		$t_1\,s_1,\ s\,t$

zu $p\,q$, $p_1\,q_1$ gehören. Die von diesen acht projectivischen Beziehungen bestimmten Paare von collinearen Systemen sind aber auch wirklich affin. Dies wird sofort anschaulich, wenn man die Ellipse A für einen Augenblick durch Orthogonal-Projection in einen Kreis verwandelt. Dadurch gehen alle acht Paare collinearer Systeme in eben so viele Paare congruenter Systeme über und zwar erhält man aus den vier letzten projectivischen Beziehungen einstimmig congruente Systeme, d. h. solche, welche sich durch Drehung des einen

Systems um den Mittelpunkt des Kreises zur Deckung bringen lassen, dagegen werden die aus den ersten vier projectivischen Beziehungen erhaltenen Systeme symmetrisch congruent, d. h. sie kommen durch Umklappen des einen um einen Durchmesser des Kreises zur Deckung.

Dass jedes der acht gefundenen Paare affiner Systeme die gestellten Bedingungen, den Kegelschnitt A in sich selbst und die Hyperbel M in eine gleichseitige zu verwandeln, wirklich erfüllt, bedarf kaum der Bemerkung. Von ihnen sind die vier ersten zur Construction am bequemsten, denn bei ihnen liegen die Systeme collinear und involutorisch. Welches von ihnen man anwenden will, ist gleichgültig, wählt man etwa das erste, so wird der die Sehne $p\,s$ halbirende Durchmesser G der Ellipse Collineations-Axe; die Verbindungslinien aller Paare von einander entsprechenden Punkten $x\,x'$ sind zur Sehne $p\,s$ parallel und werden in ihrem Schnittpunkt mit der Geraden G halbirt. Alles dieses verificirt man am einfachsten wieder durch die obige Verwandlung der Ellipse A in einen Kreis.

II. A sei Hyperbel.

Betrachtet man die Systeme $S\,S'$ wieder als bestimmt durch zwei projectivische Punktreihen auf A, so muss zunächst, damit diese Systeme überhaupt affin werden, von den unendlich fernen Punkten der Hyperbel A entweder jeder zu sich selbst gehören, oder es müssen diese Punkte einander wechselweise entsprechen. Damit ferner die Hyperbel M' gleichseitig werde, müssen, wie im Falle der Ellipse, die zu den Asymptoten vom M parallelen conjugirten Durchmesser von A in die Axen dieser Hyperbel übergehen. Hieraus ergiebt sich für die beiden projectivischen Punktreihen auf A die weitere Bedingung, dass den Endpunkten $p\,q$ des reellen unter jenen beiden conjugirten Durchmessern die Endpunkte $s\,t$ der reellen Axe von A entsprechen. Da die beiden unendlich fernen Punkte der A von den End-

punkten eines jeden Durchmessers harmonisch getrennt werden, so genügen diesen beiden Bedingungen im Ganzen vier Paar projectivischer Punktreihen, welche wiederum vier Paare affiner Systeme $S\,S'$ bestimmen. Jedes solche Paar ist aber hier anwendbar. Denn bei jedem verwandelt die collineare Beziehung die Hyperbel A in sich selbst, ferner den Durchmesser $p\,q$ in die Axe $s\,t$, die Tangenten in den Punkten $p\,q$ in die Tangenten der Punkte $s\,t$ und also endlich auch den zu $p\,q$ conjugirten und den Tangenten in $p\,q$ parallelen Durchmesser in die zu den Tangenten in $s\,t$ parallele imaginäre Axe.

Von den vier Paaren affiner Systeme liegen die beiden, in welchen die unendlich fernen Punkte der A sich wechselweise entsprechen, collinear und involutorisch, sie sind desshalb den beiden andern vorzuziehen. Wählt man unter ihnen dasjenige, in welchem dem Punkt p der s als p' entspricht, so sind alle Verbindungslinien je zweier einander entsprechender Punkte $x\,x'$ der Sehne $p\,s$ parallel und werden von dem zur Richtung dieser Sehne conjugirten Durchmesser G halbirt.

III. *A* sei Parabel.

Damit die Systeme $S\,S'$ affin werden, ist nur nöthig, dass in den sie bestimmenden projectivischen Punktreihen auf A der unendlich ferne Punkt dieser Parabel sich selbst entspricht. Von den beiden Asymptoten der Hyperbel M hat eine die Richtung der Axe von A; parallel zur andern ziehe man an die A eine Tangente, dann muss, damit M' gleichseitige Hyperbel wird, jene Tangente in die Scheiteltangente der A übergehen, und also muss ihrem Berührungspunkte p der Scheitel s von A entsprechen. Es gibt unendlich viele Paare projectivischer Punktreihen auf A, welche diesen beiden Bedingungen genügen, somit erhält man hier auch unendlich viele Paare affiner Systeme $S\,S'$, welche offenbar alle brauchbar sind. Unter diesen ist eines, dessen Systeme collinear

und involutorisch liegen und welches sich demnach zur Construction vorzugsweise eignet; dieses wird erhalten, wenn man die projectivischen Punktreihen auf *A* dadurch völlig bestimmt, dass man auch umgekehrt dem Punkt *s* den Punkt *p* entsprechen lässt. Alle Verbindungslinien zweier einander entsprechender Punkte sind hier zur Sehne *p s* parallel, und werden von dem durch die Mitte dieser Sehne gehenden Durchmesser *G* der *A* halbirt; dieser Durchmesser ist Collineations-Axe.

Die Resultate der bisherigen Betrachtungen mögen hier noch einmal übersichtlich zusammengestellt werden:

Um zwei collineare Systeme $S\,S'$ zu erhalten, welche den festen Kegelschnitt A in sich selbst, den K aber in einen andern Kegelschnitt K' verwandeln, so, dass der Büschel B (A K') einen Kreis enthält, verfahre man folgendermassen:

Ist A Ellipse oder Hyperbel, so suche man diejenigen beiden, nach den gemachten Annahmen immer reellen, conjugirten Durchmesser dieses Kegelschnitts, welche zweien conjugirten Durchmessern von K parallel sind. Zu diesem Zweck muss man sich die Involution des Mittelpunkts von K verschaffen, stellt sich bei dem Versuch hierzu heraus, dass K Parabel ist, so hat man die beiden conjugirten Durchmesser von A zu nehmen, von denen der eine zur Axe von K parallel ist. Erhält man nun für diese beiden conjugirten Durchmesser die Hauptaxen von A, so enthält der Büschel B (A K) schon einen Kreis und weitere Operationen sind überflüssig. Im andern Falle nenne man einen (reellen) Endpunkt eines solchen Durchmessers p, einen (reellen) Endpunkt einer Hauptaxe von A aber s, ferner ziehe man noch den die Sehne p s halbirenden Durchmesser G. Alsdann leisten zwei affine, collinear und involutorisch liegende Systeme, welche die G zur Collineations-Axe haben und bei denen die sämmtlichen Verbindungslinien je zweier einander entsprechender Punkte zur p s parallel sind, das Verlangte. Construirt man demnach zu den fünf, den Kegelschnitt K bestimmenden Punkten a b c d e fünf andere a' b' c' d' e', so dass die Ver-

bindungslinien $a\,a'$ ... $e\,e'$ alle zu $p\,s$ parallel sind und von der G halbirt werden, so bestimmen die fünf Punkte a'...e' den Kegelschnitt K'.

Ist A Parabel, so tritt an Stelle des Punktes s deren Scheitel, an Stelle des Punktes p aber tritt, wenn K Ellipse oder Hyperbel ist, der Berührungspunkt derjenigen Tangente von A, welche dem zur Axenrichtung der A conjugirten Durchmesser des Kegelschnitts K parallel ist; ist aber K ebenfalls Parabel, so tritt an Stelle von p der Berührungspunkt der zur Axe von K parallelen Tangente der A. Sonst bleibt Alles ungeändert.

Die gefundene Collineation ist die einfachste, welche den gestellten Bedingungen genügt.

Es sind noch die vorhin ausgeschlossenen Fälle zu behandeln, in welchen der Kegelschnitt M Parabel oder Ellipse wird und also eine Affinität nicht ausreicht, um dem Büschel $B\,(A\,K')$ eine gleichseitige Hyperbel zum Mittelpunkts-Kegelschnitt zu geben. Diese Fälle sollen auf die bereits absolvirten zurückgeführt werden. Das hiezu geeignete Mittel ist wieder die Collineation; es giebt nämlich collineare Systeme S und S'', in denen der Kegelschnitt A sich selbst, dem als zu S gehörig betrachteten Kegelschnitt K aber ein solcher Kegelschnitt K'' entspricht, dass die Combination $A\,K''$ wieder einem der schon behandelten Fälle angehört. Solche collineare Systeme sind also aufzusuchen.

Im ersten der vier ausgelassenen Fälle war A Parabel, in den drei letzten Hyperbel. Diese sollen hier zunächst behandelt werden.

Da in den Systemen $S\,S'$ die Hyperbel A sich selbst entsprechen soll, so muss die Gegenaxe H von S jedenfalls die A in zwei distincten Punkten $i\,k$ schneiden. Ferner werden die Kegelschnitte $A\,K''$ nur dann keinen der früher behandelten Fälle darstellen, wenn die Gerade H dem K in zwei Punkten begegnet, die von i und k getrennt werden. Es werden also die Systeme $S\,S''$ ausser der gegebenen Bedingung noch eine zweite erfüllen müssen, nämlich die, dass

die Gegenaxe H mit K entweder keinen, oder nur einen, oder zwei von i und k nicht getrennte Punkte gemeinsam habe. Diese beiden Bedingungen, welche für die Gerade H und a fortiori für die Systeme S und S'' noch eine unendliche Mannigfaltigkeit offen lassen, sind hinreichend.

Findet nun der Fall (2) statt, ist also K Parabel mit zu einer Asymptote von A paralleler Axenrichtung, so wird jede Tangente von K, welche einem reellen Durchmesser von A parallel ist, die der Geraden H auferlegten Bedingungen erfüllen und kann demnach für H genommen werden.

Findet der Fall (3) statt, ist also K Hyperbel und ist eine Asymptote von A zu einer Asymptote von K parallel, so kann diese letztere für H genommen werden. (Fielen die beiden parallelen Asymptoten zusammen, so würde sich die Ordnung des Problems erniedrigen.)

Im Falle (4) endlich, wo A und K Hyperbeln sind, deren unendlich ferne Punkte sich trennen, wird die eine Asymptote von K einem imaginären, die andere einem reellen Durchmesser von A parallel sein, diese letztere kann man für H nehmen.

Es ist also immer leicht, eine Gerade H von den verlangten Eigenschaften zu finden. Ist dies geschehen, so braucht man nur auf A zwei projectivische Punktreihen herzustellen, so dass den Punkten i und k der ersten Reihe die unendlich fernen Punkte von A, welche f g heissen mögen, als Punkte der zweiten entsprechen. Je zwei solche Punktreihen bestimmen alsdann zwei hier brauchbare collineare Systeme S S''. Nun sind die projectivischen Punktreihen und somit auch die Systeme S S'' durch die gestellten Bedingungen nicht völlig bestimmt. Man wird also unter allen möglichen Systemen S S'' noch die einfachsten auszusuchen haben. Diese wird man erhalten, wenn man die projectivischen Punktreihen auf A, nachdem man festgesetzt hat, es solle dem Punkte i etwa der f, dem k der g entsprechen, dadurch

völlig bestimmt, dass man verlangt, sie sollen in Involution stehen. Alsdann fallen auch die Systeme $S\,S''$ involutorisch und collinear liegend aus. Collineations-Centrum ist der Schnittpunkt der Verbindungslinien $i\,f$ und $k\,g$, Collineations-Axe aber die Polare dieses Schnittpunktes in Bezug auf A, welche mit der H auf derselben Seite des Schnittpunktes liegt und doppelt so weit als H von demselben entfernt ist.

Im Falle (3) coincidirt einer der Punkte $i\,k$ mit einem Punkt $f\,g$. Dadurch modificirt sich die Bestimmung der Systeme $S\,S''$ unbedeutend. Sind etwa i und f die zusammenfallenden Punkte, so wird der Schnittpunkt der Geraden $k\,g$ mit der durch f gehenden Asymptote von K zum Collineations-Centrum, sonst ändert sich nichts.

Jetzt erübrigt noch der erste der früher ausgeschlossenen Fälle, nämlich dass A Parabel, K Hyperbel ist und dass eine Asymptote von K die Axenrichtung der A hat. Hier muss, da A in den collinearen Systemen $S\,S''$ sich selbst entsprechen soll, die Gegenaxe H von S Tangente von A sein. Andererseits kann aber auch jede Tangente von A Gegenaxe werden, immer erhält man, wie leicht zu sehen, für den Kegelschnitt K'' einen solchen, dass die früher gezeigte Methode anwendbar wird. (Nur die Tangenten in einem der Schnitte von A und K sind ausgeschlossen, hätte man zufällig eine solche für H genommen, so würde sich dies im Verlaufe der Construction herausstellen.) Es sei nun i der Berührungspunkt von H. Dann werden je zwei projectivische Punktreihen auf A, in welchen zu i der unendlich ferne Punkt der A gehört, zwei collineare Systeme von der verlangten Eigenschaft bestimmen. Unter den so gewonnenen Collineationen giebt es hier unendlich viele, bei denen die Systeme collinear und involutorisch liegen. Es ist nämlich jeder Punkt des durch i gehenden Diameters der A Collineations-Centrum zweier solcher Systeme, die Polare des Punktes in Bezug auf A ist die zugehörige Collineations-Axe.

So kann man also in allen Fällen, wo der Mittelpunkts-

Kegelschnitt des Büschels $B(AK)$ eine Parabel oder Ellipse ist, durch Anwendung collinearer Systeme, welche überdiess noch collinear und involutorisch liegen*), die den Kegelschnitt K definirenden Punkte $a\ b\ c\ d\ e$ in andere $a''\ldots e''$ verwandeln, so dass nun der durch diese Punkte gehende Kegelschnitt K'' mit A einen Büschel bestimmt, welcher eine Hyperbel zum Mittelpunktskegelschnitt hat. Auf A und K'' ist dann die frühere Methode anwendbar, vermöge deren die Punkte $a''\ldots e''$ durch neue, $a'\ldots e'$ ersetzt werden, so dass der durch diese gehende Kegelschnitt K' mit A einen Büschel bestimmt, welcher einen Kreis enthält. Die hierbei zu brauchenden involutorischen Systeme sollen mit $S''\ S'$ bezeichnet werden.

Die beiden Fälle, wo der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels $B(AK)$ Hyperbel ist und wo er Ellipse oder Parabel ist, unterscheiden sich, wie man sieht, nur dadurch, dass im ersten die Kegelschnitte $K\ K'$ direct durch affine Systeme $S\ S'$ zusammenhängen, während im zweiten zwischen die Systeme S und S' noch ein drittes S'', und zwischen die Kegelschnitte K und K' noch ein dritter, dem Systeme S'' angehöriger, tritt, so dass die Systeme $S\ S''$ involutorisch collinear, die Systeme $S''\ S'$ aber involutorisch affin sind.

Das einzige, was jetzt noch zur vollständigen Lösung der gestellten Aufgabe zu thun ist, besteht in der Construction des zum Büschel $B\ (A\ K')$ gehörenden Kreises. Ist dieser gefunden, so braucht man nur zu seinen Schnitten mit dem gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt A als Punkten des Systems S' in S die entsprechenden zu suchen (wozu eventuell ein Durchgang durch das System S'' erforderlich ist), diese sind die gesuchten Schnitte von A mit K.

*) Solche Systeme bieten für die Construction wesentliche Vortheile, indem bei ihnen die Auffindung des einem gegebenen entsprechenden Punktes auf die blosse Construction eines vierten harmonischen Punktes sich reducirt, da ja Collineations-Centrum und -Axe je zwei einander entsprechende Punkte harmonisch trennen.

Beim Aufsuchen jenes Kreises kann man von einem der Punkte $a' b' c' d' e'$, etwa von e', ganz absehen, indem dieser sich durch die Bedingung ersetzt, dass die Hauptaxen des durch $a' b' c' d'$ gehenden Kegelschnitts, resp. wenn K' Parabel ist, seine Axe und Scheiteltangente den Hauptaxen resp. der Axe und Scheiteltangente von A parallel sein müssen. Von den übrigen vier Punkten verbinde man nun einen, d', mit den drei übrigen. Auf jeder der drei Geraden $d' a'$, $d' b'$, $d' c'$ bestimmt der Kegelschnittbüschel $B(A K')$ eine Involution; schneidet eine der drei Geraden, etwa $d' a'$, den A, so ist diese Involution durch das Paar der beiden Schnittpunkte und das Paar $d' a'$ bestimmt; berührt die $d' a'$ den A, so bestimmt sich die Involution durch den Berührungspunkt als Doppelpunkt und das Paar $d' a'$; trifft endlich die $d' a'$ den A überhaupt nicht, so hat die Involution jedenfalls Doppelpunkte, diese erhält man als dasjenige Paar von auf $d' a'$ liegenden und in Bezug auf A einander conjugirten Punkten, welches die Punkte $d' a'$ harmonisch trennt. In jedem Falle ist es leicht, die Mittelpunkte $\alpha \beta \gamma$ der Involutionen auf den Geraden $d' a'$, $d' b'$, $d' c'$, zu erhalten. Der gesuchte Kreis muss nun, da er dem Büschel $B(A K')$ angehört, nach bekannten Sätzen das Rechteck $\overline{\beta b'} \times \overline{\beta d'}$ zur innern oder äussern Potenz*) des Punktes β haben, jenachdem dieser Punkt innerhalb oder ausserhalb der Strecke $b' d'$ liegt. Ebenso muss der Kreis das Rechteck $\overline{\gamma c'} \times \overline{\gamma d'}$ zur innern oder äussern Potenz des Punktes γ haben, jenachdem γ innerhalb oder ausserhalb der Strecke $c' d'$ liegt. Alle Kreise, welche diese beiden Bedingungen erfüllen, haben die $\beta \gamma$ zur gemeinsamen Potenzlinie, ihre Mittelpunkte liegen also auf derselben Geraden und da der durch $b' c' d'$ gelegte Kreis zu ihnen gehört, so ist diese Gerade die vom Mittelpunkte λ dieses Kreises auf die $\beta \gamma$ gefällte Senkrechte.

*) Vgl. Steiner, Geometrische Betrachtungen, Journ. f. Mathem., B. 1, pag. 164.

Auf dieser muss also der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegen. Ebenso zeigt man, dass dieser Mittelpunkt auf einer vom Mittelpunkt μ des durch $c' a' d'$ gehenden Kreises auf die $\gamma\alpha$ und endlich, dass er auf einer vom Mittelpunkt ν des durch $a' b' d'$ gehenden Kreises auf die $\alpha\beta$ gefällten Senkrechten liegen müsse. Diese drei Senkrechte schneiden sich also in demselben Punkt, welchen zwei von ihnen bestimmen, und dieser ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Den Kreis selbst erhält man jetzt leicht, indem man von einer der drei Eigenschaften Gebrauch macht, dass er mit dem Kreis durch $b' c' d'$ die $\beta\gamma$, mit dem durch $c' a' d'$ die $\gamma\alpha$, mit dem $a' b' d'$ die $\alpha\beta$ zur Potenzlinie hat.

Der so construirte Kreis kann imaginär werden. In diesem Falle, so wie, wenn der Kreis reell ist, aber keinen reellen Punkt mit dem Kegelschnitt A gemeinsam hat, werden A und K keinen reellen gemeinsamen Punkt besitzen.

Die Construction der Aufgabe, welche sich aus der eben vollendeten Analysis ergibt, kann man für den Fall, dass A Ellipse, folgendermaassen aussprechen:

Zunächst suche man die Mittelpunkts-Involution des durch die fünf Punkte a b c d e gegebenen Kegelschnitts K. Hierbei stellt sich heraus, ob K Ellipse oder Hyperbel, oder aber Parabel ist, im letzteren Falle ergibt sich die Axenrichtung von K. Nun suche man, wenn K Ellipse oder Hyperbel ist, diejenigen beiden conjugirten Durchmesser von A, welche zweien conjugirten Durchmessern von K parallel sind und nenne einen Endpunkt eines dieser Durchmesser p; ist K Parabel, so ziehe man nur den zur Axe von K parallelen Durchmesser von A und nehme einen seiner Endpunkte für p. Den Punkt p verbinde man mit einem beliebigen Scheitel s von A und ziehe endlich den die Sehne p s halbirenden Durchmesser G. Nun construire man zu den vier Punkten a b c d vier andere a′ b′ c′ d′ so, dass die Verbindungslinien a a′..d d′ zur p s parallel sind und von der G halbirt werden. Dann ziehe man die Verbindungslinien d′ a′, d′ b′, d′ c′. Trifft die d′ a′ die Ellipse A in zwei reellen

Punkten, welche auch zusammenfallen können, so suche man den Mittelpunkt der von diesen und dem Paar $d'\,a'$ bestimmten Involution. Trifft aber die $d'\,a'$ die A nicht, so suche man zuvörderst diejenigen beiden in Bezug auf A conjugirten Punkte der $d'\,a'$, welche das Paar $d'\,a'$ harmonisch trennen und dann den Halbirungspunkt der von ihnen eingeschlossenen Strecke. In jedem Falle erhält man einen Punkt auf $d'\,a'$, welcher α heissen soll. In derselben Weise suche man zwei Punkte β und γ auf resp. $d'\,b'$ und $d'\,c'$. Endlich construire man die drei umschriebenen Kreise der Dreiecke $d'\,b'\,c'$, $d'\,c'\,a'$, $d'\,a'\,b'$ und fälle von ihren Mittelpunkten Senkrechte auf resp. die Geraden $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\alpha$, $\alpha\,\beta$. Diese schneiden sich in einem Punkte. Um ihn als Mittelpunkt schlage man denjenigen Kreis, welcher mit dem Kreise durch $d'\,b'\,c'$ die $\beta\,\gamma$ zur Potenzlinie hat. Endlich ziehe man durch jeden reellen Schnittpunkt dieses Kreises mit A zur $p\,s$ eine Parallele; diese Parallelen schneiden die A zum zweitenmale in den gesuchten Schnitten mit K.

Ist ein Schnittpunkt von A und K von vornherein gegeben, so vereinfacht sich die Construction des Kreises ein wenig.

Ist A Parabel oder Hyperbel, so treten je nach Umständen zu dieser Construction noch gewisse Hülfsoperationen hinzu, die aber hier nicht noch einmal auseinandergesetzt werden sollen.

Zu dieser Lösung gestattet sich der Verfasser noch folgende Bemerkungen:

Sie ist, wie bei der Analysis nachgewiesen, die einfachste, zu welcher man auf dem hier eingeschlagenen Wege gelangen kann, wenigstens für den Fall, wo keine Hülfsoperationen erforderlich sind, wo nämlich der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels $B\,(A\,K)$ schon eine Hyperbel ist. Im andern Falle könnte man möglicher Weise zu einer etwas einfachern Construction gelangen, wenn man versuchte, es direct durch eine einzige collineare Transformation dahin zu bringen, dass jener Mittelpunkts-Kegelschnitt gleichseitige Hyperbel wird, während ja hier eine erste Transformation nur dazu diente,

diesen Kegelschnitt überhaupt zur Hyperbel zu machen, welche Hyperbel dann durch eine zweite Transformation in eine gleichseitige verwandelt wurde. Indessen ist dies nicht wahrscheinlich; jedenfalls würde die Vereinfachung nicht im Verhältniss zur Mühe der Untersuchung stehen und endlich kann man ja den fraglichen Umweg dadurch vermeiden, dass man für den festen Kegelschnitt A eine Ellipse nimmt.

Nun könnte es aber scheinen, als ob man durch eine leichte Aenderung in der ganzen Methode vielleicht zu einem einfachern Resultate gelangen würde. Man könnte nämlich darauf ausgehen, direct durch collineare Transformation den Kegelschnitt A in sich selbst und den durch fünf Punkte gegebenen K in einen Kreis zu verwandeln; dann würde jedenfalls die Construction des die Aufgabe lösenden Kreises eine einfachere, indem man direct drei Punkte dieses Kreises erhielte. Allein diese Methode hat den Uebelstand, dass, mag man nun für A eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel wählen, immer Fälle, und zwar coordinirte, keine eigentlichen Ausnahmefälle, existiren, in denen sie den Dienst versagt. Es sei z. B. A Ellipse, die angewandten collinearen Systeme mögen S und S' heissen, so, dass der Kegelschnitt K dem System S angehört und der Kreis, in welchen er verwandelt werden soll, dem System S'. Dann darf die Gegenaxe von S weder die A noch den K schneiden. Nun ist aber der Fall denkbar, dass jede Gerade, welche die Ellipse A nicht trifft, den Kegelschnitt K schneidet, und in diesem Falle versagt die Methode den Dienst.

Zweite Abtheilung.

Construction der beiden Paare conjugirt imaginärer Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $K = (a\,b\,c\,d\,e)$ und $K_1 = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1)$, falls diese keinen reellen gemeinsamen Punkt besitzen.

Zwei reelle Kegelschnitte, welche keinen reellen Punkt mit einander gemein haben, besitzen im Allgemeinen ein

reelles Paar sogenannter Chordalen, d. h. Gerade, auf welchen von beiden Kegelschnitten dieselbe Polarinvolution bestimmt wird. Diese beiden Chordalen in Verbindung mit den beiden Polarinvolutionen repräsentiren die beiden Paare conjugirt imaginärer Schnittpunkte von K und K_1 und um ihre Construction handelt es sich also hier. Da diese Construction dadurch, dass einer der Kegelschnitte ein Kreis ist, um nichts leichter wird, so ist die in der ersten Abtheilung auseinandergesetzte Methode direct nicht mehr anwendbar. Nun haben aber bekanntlich die Kegelschnitte K und K_1 im Allgemeinen ein einziges (hier vollkommen reelles) Polardreieck gemeinsam, in dessen einer Ecke sich die beiden fraglichen Chordalen schneiden. Ist dieses Polardreieck, dessen Ecken $x\,y\,z$ heissen mögen, gefunden, so braucht man nur noch ein Paar $v\,w$ von in Bezug auf beide Kegelschnitte gleichzeitig einander conjugirten Punkten sich zu verschaffen, alsdann bestimmen die drei Geradenpaare:

$$\begin{array}{ll} x\,v, & x\,w \\ y\,v, & y\,w \\ z\,v, & z\,w \end{array}$$

mit resp. den Seitenpaaren

$$\begin{array}{ll} x\,y, & x\,z \\ y\,z, & y\,x \\ z\,x, & z\,y \end{array}$$

drei Strahlinvolutionen, eine unter diesen hat die gesuchten Chordalen zu Doppelstrahlen, die anderen haben keine Doppelstrahlen und repräsentiren zwei andere conjugirt imaginäre Paare von Chordalen*). Es wird sich also nur noch um die Construction des Dreiecks $x\,y\,z$ handeln.

Die beiden reellen Chordalen der Kegelschnitte $K\,K_1$

*) Vgl. z. B. Steiner, Vorlesungen, B. 2, pag. 505. Ueberhaupt finden sich in §. 61 des angeführten Werkes die hier gebrauchten Eigenschaften der Kegelschnitte in der nöthigen Allgemeinheit entwickelt, denn es sind dort die Kegelschnitte durch Polarsysteme (Involutions-Netze) ersetzt.

können in einem besondern Falle in dieselbe Gerade coincidiren, dann haben K und K_1 nicht ein Polardreieck, sondern unendlich viele solche Dreiecke gemeinsam, man sagt alsdann bekanntlich, dass diese Kegelschnitte einander imaginär doppelt berühren. Ob dieser Fall vorliegt, lässt sich nicht ohne weiteres entscheiden, eine besondere, der Construction des Dreiecks $x\,y\,z$ vorhergehende Untersuchung hierüber ist aber nicht nöthig, sondern man kann bei der Herleitung jener Construction voraussetzen, der Fall sei nicht vorhanden. Diese Herleitung wird nämlich zeigen, dass es mehrere Fälle gibt, in welchen sich die Ordnung des Problems erniedrigt und welche also von der Betrachtung auszuschliessen sind; unter diese subsumirt sich auch der hier vorliegende. Uebrigens zeigt, wie man sehen wird, die Construction selbst in ihrem Verlaufe das etwaige Vorhandensein eines solchen Falles an.

Um nun das fragliche Polardreieck zu construiren, sollen zwei Kegelschnitte aufgesucht werden, welche sich in einem bestimmten Punkte, und dann noch in den Ecken $x\,y\,z$ des Dreiecks schneiden. Einen durch $x\,y\,z$ gehenden Kegelschnitt erhält man, wenn man zu einem beliebigen Punkte p in Bezug auf K und K_1 die Polaren P und P_1 sucht, deren Schnittpunkt p' heissen möge, wenn man ferner den Punkt p eine beliebige Gerade G durchlaufen lässt, hiebei drehen sich P und P_1 um die Pole g und g_1 dieser Geraden und erzeugen einen Kegelschnitt C von der verlangten Eigenschaft. Dieser fordert zu seiner vollständigen Bestimmung ausser den Punkten g und g_1 noch drei andere Punkte, und diese erhält man, wenn man irgend drei besondere Lagen von p auf G betrachtet. Um also fünf Punkte eines durch $x\,y\,z$ gehenden Kegelschnitts C zu bekommen, wähle man irgend drei derselben Geraden G angehörige Punkte $m\,r\,s$, suche zu diesen die drei Polaren $M\,R\,S$ in Bezug auf K, ebenso die drei Polaren $M_1\,R_1\,S_1$ in Bezug auf K_1, dann schneiden sich $M\,R\,S$ in einem Punkte g, $M_1\,R_1\,S_1$ in einem Punkte g_1; diese Punkte $g\,g_1$ bestimmen in Verbindung mit den drei

Schnittpunkten $m' r' s'$ der drei Geradenpaare MM', RR', SS' den Kegelschnitt C. Um nun einen zweiten durch $x y z$ gehenden Kegelschnitt D zu erhalten, welcher mit C einen bekannten Punkt gemeinsam hat, ersetze man die Punkte $r s$ durch zwei andere, $t u$, welche mit m in einer anderen Geraden H liegen, suche zu $t u$ in Bezug auf K die Polaren $T U$, in Bezug auf K_1 die Polaren $T_1 U_1$, dann schneiden sich $T U$ in einem Punkte h, $T_1 U_1$ in einem Punkte h_1, $h h_1$ bestimmen in Verbindung mit m' und den Schnittpunkten $t' u'$ der Geradenpaare $T T_1$, $U U_1$ den zweiten Kegelschnitt D, welcher mit C den bekannten Punkt m' gemein hat.

Die Bestimmung der Punkte $x y z$ durch die Kegelschnitte C und D kann dadurch illusorisch werden, dass einer dieser Kegelschnitte, etwa C, durch das Zusammenfallen von zweien der fünf Punkte, welche er enthalten soll, aufhört, bestimmt zu sein. Dies können nur die Punkte $g g_1$ sein, denn, wenn einer der Punkte $m' r' s'$ mit einem der Punkte $g g_1$, etwa mit g, zusammenfällt, wird der Kegelschnitt C gar nicht unbestimmt, sondern es tritt nur an Stelle von m' die Tangente von C im Punkte g; das Zusammenfallen von zweien der Punkte $m' r' s'$ aber hat das Zusammenfallen von g und g_1 zur nothwendigen Folge. Coincidirten nun die Punkte $g g_1$, so wäre die Gerade G Seite eines gemeinsamen Polardreiecks von K und K_1, die Kenntniss einer solchen Seite aber reducirt die Ordnung des Problems und es kann also der Fall des Unbestimmtwerdens eines der Kegelschnitte C D hier ausgeschlossen werden.

Ferner könnte einer der Kegelschnitte C D, etwa C, in die Gerade $g g_1$ und noch eine andere, auf welcher alsdann die Punkte $m' r' s'$ lägen, zerfallen. Alsdann wäre die $g g_1$ Seite eines gemeinsamen Polardreiecks von K und K_1 und auch dieser Fall kann also hier ausgeschlossen werden.

Mit den beiden eben beschriebenen Fällen ist nun auch die Möglichkeit einer doppelten Berührung der Kegelschnitte K und K_1 ausgeschlossen, denn eine solche würde den einen

oder den andern dieser Fälle mit Nothwendigkeit nach sich ziehen*).

Zur Construction der drei übrigen den Kegelschnitten CD gemeinsamen Punkte $x\ y\ z$ kann man jetzt, da diese Kegelschnitte durch je fünf Punkte gegeben sind, ohne Weiteres die in der ersten Abtheilung auseinandergesetzte Methode anwenden, d. h. man kann diese Punkte mit Hülfe eines beliebigen, gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts durch Zirkel und Lineal finden.

Wie man verfahren müsse, um mit Hülfe der Punkte $x\ y\ z$ die beiden reellen Chordalen der Kegelschnitte $K\,K_1$ und damit ihre imaginären Schnittpunkte zu finden, ist schon oben angegeben; für die dort $v\ w$ genannten Punkte kann man ein beliebiges der bereits gezeichnet vorliegenden Punktpaare $m\,m'$ $r\,r'$ $s\,s'$ $t\,t'$ $u\,u'$ nehmen.

Die abgeleitete Construction ist auch dann noch anwendbar, wenn einer der Kegelschnitte $K\,K_1$ imaginär wird, oder wenn sie beide imaginär werden. Nur können sie als-

*) Die entwickelte Reduction des Problems, die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu finden, auf die Construction des Dreiecks $x\ y\ z$ findet sich mit einigen unwesentlichen Modificationen auch in dem mehrfach citirten zweiten Bande der Steiner'schen Vorlesungen, pag. 400, und zwar ist dort das Problem nicht auf den Fall bloss imaginärer Schnittpunkte beschränkt, sondern allgemein behandelt. Es hätte also hier auf jenes Werk verwiesen werden können. Dass statt dessen die ganze Construction noch einmal auseinander gesetzt worden ist, hat seinen Grund einmal in dem Wunsche, hier nichts, was zu einer vollständigen Behandlung des Gegenstandes gehört, unerörtert zu lassen; dann aber gab diese Auseinandersetzung Gelegenheit, hervorzuheben, wie die Construction selbst das Eintreten der Ausnahmefälle anzeigt, in denen sie sich modificirt. Diese Eigenschaft der Construction tritt in der Darstellung des genannten Werkes nicht recht hervor, sie erscheint aber nicht unwichtig, wenn man bedenkt, dass in den wenigsten Fällen sich von vornherein darüber urtheilen lassen wird, ob ein solcher Ausnahmefall vorliege.

dann nicht mehr als durch reelle Punkte gegeben angesehen werden, sondern man wird die Construction direct an die Polarsysteme anknüpfen müssen, welche in diesem Falle die Kegelschnitte repräsentiren, was übrigens keine Complication, sondern eine Vereinfachung herbeiführt.

Ferner ist noch zu bemerken, dass die Construction die Reduction einer Gleichung vierten Grades auf ihre Resolvente enthält *). Man kann sie auch dann noch anwenden, wenn die Kegelschnitte $K\,K_1$ reelle Punkte gemeinsam haben, indessen ist dadurch geometrisch nichts gewonnen, da die in der ersten Abtheilung für die Construction der reellen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte gegebene Methode sich durch die Kenntniss eines solchen Schnittpunktes nicht wesentlich vereinfacht.

Anhang.

Die in dieser Abhandlung entwickelten Constructionsmethoden lassen sich auch zur Auffindung der Wurzeln einer cubischen oder biquadratischen Gleichung gebrauchen. Chasles hat in seiner Abhandlung: »Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré«**) diese Aufgabe in höchst eleganter Weise auf die Construction der Schnittpunkte eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts mit einem andern, durch fünf Punkte gegebenen, zurückgeführt. Unter Benutzung desselben festen Kegelschnitts kann aber diese letztere Construction mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Und zwar findet man auf diese Weise nicht allein die reellen, sondern auch die Paare conjugirt imaginärer Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Zu jedem solchen Paar

*) Auch diese Bemerkung findet sich bei Steiner a. a. O.

**) Journal des mathématiques, publié par Liouville, t. XX, pag. 329.

gehört nämlich ein Paar conjugirt imaginärer Schnittpunkte des durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitts mit dem festen. Die Construction liefert diejenige Gerade, welche in Verbindung mit einer auf ihr befindlichen Involution ohne Doppelpunkte jenes Paar von Schnittpunkten vertritt. Um nun mit Hülfe dieser Geraden das zugehörige Wurzelpaar der Gleichung zu finden, verfahre man wie folgt:

Man suche die Polaren zweier Punkte der Geraden in Bezug auf den festen Kegelschnitt. Die (immer reellen) Schnittpunkte jeder dieser Polaren mit dem festen Kegelschnitt projicire man von dem Punkt P (ich bediene mich der Chasles'schen Bezeichnung) auf die Gerade $O\,X$. Die beiden so erhaltenen Punktpaare bestimmen auf dieser Geraden eine Involution ohne Doppelpunkte; μ sei der Mittelpunkt dieser Involution, $\nu\,\nu_1$ seien irgend zwei zu einander gehörige Punkte. Dann sind

$$O\,\mu \pm \sqrt{\overline{\mu\nu} \times \overline{\mu\nu_1}}$$

die gesuchten Wurzeln. (Natürlich haben die Strecken $\mu\,\nu$, $\mu\,\nu_1$ entgegengesetzte Zeichen.)

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich aus algebraischen Gründen, wenn man erwägt, dass alle bei der Construction vorkommenden Operationen sich durch algebraische ersetzen lassen und dass die Behauptung gilt, sobald man ein reelles Wurzelpaar an Stelle des imaginären setzt. Ein Beweis von mehr geometrischem Charakter würde Erörterungen über den Zusammenhang des Imaginären in der Geometrie mit dem in der Algebra verlangen und also hier zu weit führen.

Der in der Abhandlung gelösten Aufgabe steht zur Seite die andere, durch Anwendung derselben Hülfsmittel die gemeinschaftlichen Tangenten zweier durch je fünf Tangenten $a\,b\,c\,d\,e$ und $a_1\,b_1\,c_1\,d_1\,e_1$ gegebenen Kegelschnitte zu finden. Diese wird wohl am einfachsten construirt, indem man die Pole der Geraden $a \ldots e$, $a_1 \ldots e_1$ in Bezug auf den

festen Kegelschnitt sucht, diese bestimmen zwei Kegelschnitte, deren Schnittpunkte man nach der entwickelten Methode finden kann und endlich sind dann die Polaren dieser Schnittpunkte in Bezug auf den festen Kegelschnitt die gesuchten Tangenten. Dies gilt auch dann, wenn conjugirt imaginäre Paare von gemeinschaftlichen Tangenten vorhanden sind; jedes solche Paar wird durch eine Strahl-Involution ohne Doppelstrahlen vertreten und diese Strahl-Involution erhält man als das Reciproke zu einer Punkt-Involution ohne Doppelpunkte.

Zweite Abhandlung.

Auflösung einiger Aufgaben über Curven vierten Grades.

---

§. 1.

Die folgende Abhandlung hat zum Hauptzweck die Lösung der Aufgabe, *wenn von den 16 Grundpunkten eines Büschels von Curven vierten Grades 13 gegeben sind, die übrigen zu finden.* Diese Aufgabe steht in enger Beziehung zu einer andern, nach deren Determination sie fragt, nämlich *durch 14 gegebene Punkte eine Curve vierten Grades zu legen,* und so ist auch die hier gegebene Lösung der ersten Aufgabe verknüpft mit einer Lösung der zweiten. Nun liesse sich zwar die erste Lösung unabhängig von der zweiten auseinandersetzen, allein einestheils würde die Darstellung dadurch sehr an Uebersichtlichkeit verlieren, andererseits aber scheint dem Verfasser die auf den folgenden Blättern dargestellte Construction der durch 14 gegebene Punkte gehenden Curve vierten Grades vor den ihm bekannten früheren Auflösungen dieser Aufgabe*) wenigstens in so fern den Vorzug

*) Solche Auflösungen giebt Herr de Jonquières in seinem „Essai sur la génération des courbes géométriques", Paris 1858, artt. 31, 34, 36, 39, 40, 44, 45, 46. Die von Herrn Härtenberger in der Abhandlung „Ueber die Erzeugung geometrischer Curven", Journal für Mathematik, B. 58, pag. 54 entwickelte Construction ist wegen einer auf pag. 58 sich findenden irrthümlichen Anwendung des sogenannten Princips der anharmonischen Correspondenz fehler-

zu verdienen, als sie einen klareren Einblick in die Natur des Problems gewährt und sich der Chasles'schen Construction der durch 9 Punkte gehenden Curve dritten Grades enger anschliesst. Daher wollte er sich die Mittheilung derselben nicht versagen. Beide Aufgaben gehören übrigens in den Kreis derjenigen, welche sich mit Hülfe des Lineals, des Zirkels und eines festen Kegelschnitts construiren lassen.

§. 2.

Bei den hier gegebenen Lösungen der in §. 1 gestellten beiden Aufgaben kommen folgende Sätze über Curven vierten Grades zur Anwendung.

1) Eine Curve vierten Grades ist im Allgemeinen eindeutig bestimmt durch 14 einfache Punkte, oder durch 1 Doppelpunkt und 11 einfache, oder durch 2 Doppelpunkte und 8 einfache, oder durch 3 Doppelpunkte und 5 einfache.

2) Will man eine vorgelegte Curve vierten Grades durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugen, so kann man die sämmtlichen Grundpunkte des einen Büschels und noch einen des zweiten beliebig auf der Curve annehmen. Danach aber sind die übrigen Grundpunkte des zweiten Büschels vollkommen bestimmt.

Hat die Curve 1, 2, 3 Doppelpunkte und nimmt man diese von vornherein unter die Grundpunkte der erzeugenden Büschel auf, so gilt genau dasselbe hinsichtlich der noch fehlenden Grundpunkte dieser Büschel.

3) Alle Curven vierten Grades, welche 13 einfache Punkte gemeinsam haben, gehen ausserdem noch durch dieselben 3 andern Punkte.

---

haft. Zufolge dieses Princips werden dort Systeme als collinear behandelt, die dies in Wirklichkeit nicht sind. Die in derselben Abhandlung beschriebene Construction der Curven dritten Grades wird von diesem Fehler nicht berührt, wohl aber leiden die allgemeinen, auf Curven *n*ten Grades bezüglichen, Resultate unter demselben.

Alle Curven vierten Grades, welche 1 Doppelpunkt und 10 einfache Punkte gemeinsam haben, gehen ausserdem noch durch dieselben 2 Punkte.

Alle Curven vierten Grades, welche 2 Doppelpunkte und 7 einfache gemeinsam haben, besitzen ausserdem noch 1 gemeinsamen Punkt.

Von diesen Sätzen sind dem Verfasser keine stichhaltigen geometrischen Beweise bekannt *). Sie werden indess auch in geometrischen Schriften allgemein als richtig angenommen, was denn auch hier geschehen soll. Uebrigens würde der strenge Beweis des zweiten Satzes mit allen seinen speciellen Fällen eine vollständige geometrische Theorie der Curven vierten Grades involviren, also eine Arbeit, welche immer noch zu wünschen bleibt.

§. 3.

Es soll die zweite Aufgabe zuerst und zwar in Verbindung mit noch andern behandelt werden; diese entstehen, wenn man von den zur Bestimmung der Curven vierten

*) Geometrische Beweise der Behauptungen des zweiten Satzes (und zwar für Curven *n*ten Grades) versucht Herr de Jonquières in dem oben angeführten Essai, artt. 15, 17, 18. Diese Beweise beruhen auf der Vergleichung der Anzahl der Bedingungen eines Problems mit der Anzahl seiner Unbekannten. Mir scheint aber diese Methode erstens nur unter gewissen Voraussetzungen zuverlässig, und zweitens wegen ihres algebraischen Charakters in der Geometrie nicht anwendbar.

Geometrische Beweise des ersten und dritten Satzes befinden sich in der: „Introduzione ad una theoria geometrica delle curve piane" des Herrn Cremona (Bologna 1862), artt. 33, 34, 41. Von beiden Sätzen sind dort nur die Hauptfälle ausdrücklich angeführt, die andern Fälle sind aber implicite in diesen enthalten, vermöge der Bemerkungen, dass ein Doppelpunkt drei einfache Punkte vertritt, wenn es sich um die Bestimmung einer algebraischen Curve handelt, dass er hingegen vier Schnittpunkten zweier solcher Curven äquivalent ist (artt. 32, 33). Diese Beweise leiden indess an ganz ähnlichen Gebrechen.

Grades gegebenen Punkten 3, resp. 6, 9 durch 1, resp. 2, 3 Doppelpunkte ersetzt. In allen diesen Aufgaben kommt es darauf an, entweder einen Büschel von Curven dritten Grades und einen zu ihm projectivischen Strahlbüschel oder zwei zu einander projectivische Kegelschnittbüschel zu finden, welche die fragliche Curve vierten Grades erzeugen. Der letztere Weg soll gewählt werden und man hat es also mit den folgenden vier Aufgaben zu thun:

Zwei projectivische Kegelschnittbüschel zu finden, welche eine entweder

I. durch 3 Doppelpunkte $k_1\, k_2\, k_3$ *und 5 einfache*

$a\, p\; 1\; 2\; 3$

oder

II. durch 2 Doppelpunkte $k_1\, k_2$ *und 8 einfache*

$a\, b\, p\; 1\; 2\; 3\; 4\; 5$

oder

III. durch 1 Doppelpunkt k_1 *und 11 einfache*

$a\, b\, c\, p\; 1\; 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7$

oder

IV. durch 14 einfache Punkte

$a\, b\, c\, d\, p\; 1\; 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7\; 8\; 9$

gegebene Curve vierten Grades erzeugen.

Bei der ersten Aufgabe kann man zwei Büschel von den verlangten Eigenschaften sofort angeben; zur Basis des einen können die Punkte $k_1\, k_2\, k_3\, a$, zur Basis des andern die Punkte $k_1\, k_2\, k_3\, p$ genommen werden, die projectivische Beziehung hat man so einzurichten, dass die beiden durch je die Punkte 1 2 3 gehenden Kegelschnitte der Büschel einander entsprechen.

Bei der zweiten Aufgabe mache man die Punkte $k_1\, k_2\, a\, b$ zur Basis des ersten Büschels, zur Basis des zweiten nehme man $k_1\, k_2\, p$ und einen unbestimmten Punkt x, dann kommt die Lösung darauf hinaus, x so zu bestimmen, dass

$$(k_1\, k_2\, a\, b)\; 1\; 2\; 3\; 4\; 5 \;\overline{\wedge}\; (k_1\, k_2\, p\, x)\; 1\; 2\; 3\; 4\; 5\text{*)}.$$

*) Hier und im Verlaufe habe ich mich des sehr bequemen von

Bei der dritten Aufgabe mache man die Punkte $k_1 a b c$ zur Basis des einen Büschels, während man für die des andern die Punkte $k_1 p$ und zwei unbestimmt gelassene, $x y$, nimmt; diese letzteren sind alsdann so zu bestimmen, dass

$$(k_1 a b c)\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \barwedge (k_1 p x y)\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7.$$

Endlich bei der vierten Aufgabe nehme man für die Basis des einen Büschels die Punkte $a b c d$, für die des andern p und drei unbestimmte Punkte $x y z$, welche alsdann so zu bestimmen sind, dass

$$(a b c d)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \barwedge (p x y z)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9.$$

Alle vorkommenden Gruppen von bekannten, ein und demselben Büschel angehörenden, Kegelschnitten kann man ersetzen durch zu ihnen projectivische Gruppen irgend eines einförmigen Gebildes (gerades Gebilde, Strahlbüschel, vgl. v. Staudt, Geometrie der Lage, pag. 10) und man muss diese Substitution vornehmen, sobald man die betreffenden Constructionen wirklich ausführen will*). Demnach kann man die noch zu lösenden Aufgaben folgendermaassen aussprechen:

Sind $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots$ *gegebene Elemente irgend eines einförmigen Gebildes, so soll, wenn gegeben sind die Punkte*

$$p q r\ 1\,2\,3\,4\,5,$$

gefunden werden ein Punkt x, *so dass*

$$(p q r x)\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \barwedge \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5,$$

ferner sollen, wenn gegeben sind die Punkte

$$p q\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7,$$

gefunden werden zwei Punkte $x y$, *so dass*

$$(p q x y)\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \barwedge \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7,$$

endlich sollen, wenn gegeben sind die Punkte

$$p\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9,$$

---

v. Staudt eingeführten Zeichens $\barwedge$ für das Wort »projectivisch« bedient. Die für die Kegelschnittbüschel angewandte Bezeichnungsweise rührt von de Jonquières her, ebenso der Ausdruck Basis für die Gesammtheit der Grundpunkte eines solchen Büschels.

*) Die nöthigen Operationen können mit Hülfe des Lineals allein ausgeführt werden.

gefunden werden drei Punkte $x\,y\,z$, so dass

$(p\,x\,y\,z)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7\,\alpha_8\,\alpha_9$.*)

Der ersten dieser Aufgaben soll noch vorangeschickt werden die folgende unbestimmte:

Wenn gegeben sind die Punkte

$p\,q\,r\ 1\,2\,3\,4$,

alle Punkte x zu finden, für welche

$(p\,q\,r\,x)\ 1\,2\,3\,4 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$.

Sodann sollen zwischen die erste und zweite resp. die zweite und dritte Aufgabe noch eingeschaltet werden die ebenfalls unbestimmten Aufgaben:

Wenn gegeben sind die Punkte

$p\,q\ 1\,2\,3\,4\,5\,6$,

alle möglichen Paare von Punkten $x\,y$ zu finden, so dass

$(p\,q\,x\,y)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6$

und

wenn gegeben sind die Punkte

$p\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8$,

alle möglichen Gruppen von drei Punkten $x\,y\,z$ zu finden, für welche

$(p\,x\,y\,z)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7\,\alpha_8$.

§. 4.

Zur Lösung der im §. 3 gestellten Aufgaben dient folgender Hülfssatz:

Es seien $B(K^{(1)})$ und $B(K^{(2)})$ zwei projectivisch so aufeinander bezogene Kegelschnittbüschel, dass den Kegelschnitten

$K_1^{(1)}\ K_2^{(1)}\ K_3^{(1)}\ K_4^{(1)}$..........

von $B(K^{(1)})$ die Kegelschnitte

$K_1^{(2)}\ K_2^{(2)}\ K_3^{(2)}\ K_4^{(2)}$..........

*) Diese Zurückführung findet sich auch bei Herrn de Jonquières, Essai etc. artt. 31, 36, 40. Die Aufgaben selbst sind ebenfalls dort behandelt in den artt. 27. 35, 40.

von $B(K^{(2)})$ *entsprechen. Die von den Kegelschnittpaaren*

$$K_1^{(1)}\ K_1^{(2)},\ K_2^{(1)}\ K_2^{(2)},\ K_3^{(1)}\ K_3^{(2)},\ldots\ldots\ldots$$

bestimmten Büschel mögen

$$B(K_1),\ B(K_2),\ B(K_3)\ldots\ldots$$

genannt werden. Aus dem ersten dieser Büschel nehme man einen beliebigen Kegelschnitt K_1, *dann giebt es im zweiten einen ganz bestimmten Kegelschnitt* K_2, *so dass erstens der von* K_1 *und* K_2 *bestimmte Büschel* $B(K)$ *mit jedem der Büschel* $B(K_3)$, $B(K_4)$...... *einen Kegelschnitt* K_3, K_4...... *gemeinsam hat und dass*

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ldots\ldots \barwedge K_1^{(1)}\ K_2^{(1)}\ K_3^{(1)}\ K_4^{(1)}\ldots\ldots$$
$$\barwedge K_1^{(2)}\ K_2^{(2)}\ K_3^{(2)}\ K_4^{(2)}\ldots\ldots$$

Die Beziehung zwischen den Büscheln $B(K_1)$, $B(K_2)$, $B(K_3)$ ...... *ist eine projectivische.*

Beweis: Die Büschel $B(K^{(1)})$ und $B(K^{(2)})$ erzeugen eine Curve vierten Grades C. Diese Curve kann auch vom Büschel $B(K^{(1)})$ in Verbindung mit noch unzähligen andern erzeugt werden (§. 2); einen Grundpunkt l eines solchen Büschels kann man beliebig auf der Curve annehmen, dann ergeben sich die drei andern $m\ n\ o$, wenn man durch l und die vier Schnittpunkte irgend zweier einander entsprechender Kegelschnitte aus den Büscheln $B(K^{(1)})$ und $B(K^{(2)})$, etwa $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$, einen neuen Kegelschnitt legt, dieser begegnet der Curve C ausser in l und jenen Schnittpunkten von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ in den gesuchten Punkten $m\ n\ o$. Nun nehme man für l einen der vier Punkte, welche der Kegelschnitt K_1 ausser den vier Schnitten von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ noch mit der Curve C gemein hat, dann fallen $m\ n\ o$ in die drei übrigen dieser vier Punkte, und da die C durch die Büschel $B(K^{(1)})$ und $(l\,m\,n\,o)$ erzeugt werden kann, so geht durch $l\ m\ n\ o$ und die gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ ein Kegelschnitt K_2.

Fasst man nun die Punkte $l\ m\ n\ o$ auf als bestimmt durch die Kegelschnitte $K_1\ K_2$, so kann man sagen, es

könne die Curve C erzeugt werden durch den Büschel $B(K^{(1)})$ im Verein mit dem von K_1 und K_2 bestimmten Büschel $B(K)$, dies aber heisst mit andern Worten, dass erstens der Büschel $B(K)$ mit jedem der Büschel $B(K_3)$, $B(K_4)$...... einen Kegelschnitt $K_3\ K_4$........ gemeinsam habe, und dass zweitens

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4 \ldots\ldots \barwedge K_1^{(1)}\ K_2^{(1)}\ K_3^{(1)}\ K_4^{(1)} \ldots\ldots$$
$$\barwedge K_1^{(2)}\ K_2^{(2)}\ K_3^{(2)}\ K_4^{(2)} \ldots\ldots$$

So ist die im Satze behauptete Existenz eines Kegelschnitts K_2 nachgewiesen, es bleibt also nur noch zu zeigen, dass es nur einen einzigen solchen Kegelschnitt giebt. Nimmt man an, es existire noch ein anderer, so würde dieser ebenfalls mit K_1 einen Büschel bestimmen, welcher im Verein mit $B(K^{(1)})$ die Curve C erzeugt. Ginge nun dieser zweite Kegelschnitt durch einen der Punkte $l\,m\,n\,o$, so fiele er mit dem ersten zusammen, im andern Falle aber hätte K_1 mit der C zwölf Punkte gemeinsam, was unmöglich.

Dass die Beziehung zwischen den Kegelschnittbüscheln $B(K_1)$, $B(K_2)\ B(K_3)$.... eine projectivische ist, folgt daraus, dass je zwei von ihnen ebenfalls die C erzeugen.

Bei diesem Beweise ist angenommen worden, dass die Kegelschnittbüschel $B(K^{(1)})$ und $B(K^{(2)})$ keinen Grundpunkt gemeinsam haben. Der Satz und mit kleinen Modificationen der Beweis gelten aber auch dann, wenn die Büschel 1, 2, 3 gemeinsame Grundpunkte haben. Alsdann erhält die Curve C 1, 2, 3 Doppelpunkte und es vermindert sich die Anzahl der Punkte $l\,m\,n\,o$ um 1, 2, 3 Einheiten*).

*) Der Satz lässt sich auch ohne Zuhülfenahme der Curve C aus blossen Eigenschaften der Kegelschnitte beweisen, und dies müsste in einer vollständigen Theorie der Curven vierten Grades geschehen. Hier ist der gegebene Beweis der Kürze halber vorgezogen worden; dies konnte geschehen, weil der angewandte Satz über Curven vierten Grades ja ohnehin vorausgesetzt worden ist. Uebrigens lässt der Satz auch einen sehr einfachen analytischen Beweis zu.

§. 5.

Die sechs Aufgaben des §. 3 sollen jetzt einzeln behandelt werden, und zwar so, dass die erste unabhängig von den andern, und von den folgenden jede mit Hülfe der vorhergehenden gelöst wird.

Die erste Aufgabe lautete:

Wenn gegeben sind die Punkte

$$p\,q\,r\;1\,2\,3\,4$$

ferner vier Elemente $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ *eines einförmigen Gebildes, alle Punkte* x *zu finden, für welche*

$$(p\,q\,r\,x)\;1\,2\,3\,4 \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4.$$

Ein sehr bequemes Mittel zur Lösung dieser Aufgabe bieten die von Steiner in der allgemeinen Anmerkung zu seiner »Systematischen Entwickelung etc.« (vgl. pag. 251 des genannten Werkes) behandelten geometrischen Verwandtschaften, welche die Eigenschaft haben, jeden, einem gewissen Dreieck umschriebenen Kegelschnitt in eine Gerade zu verwandeln. Das Dreieck ist hier $p\,q\,r$ und eine sehr einfache Verwandtschaft der angegebenen Art erhält man, wenn man irgend ein vollständiges Viereck construirt, dessen drei Paar einander gegenüberliegende Seiten die Ecken pqr zu Schnittpunkten haben. Eine Ecke des Vierecks kann hierbei willkürlich angenommen werden, ihre Verbindungslinien mit $p\,q\,r$ geben drei Seiten und die vierten Harmonischen zu diesen Verbindungslinien in Bezug auf je zwei Seiten des Dreiecks $p\,q\,r$ die drei übrigen. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt m mit $p\,q\,r$ und sucht zu jeder solchen Verbindungslinie in Bezug auf das betreffende Paar einander gegenüberliegende Vierecksseiten die vierte Harmonische, so erhält man wieder drei in demselben Punkte m' sich schneidende Gerade, dieser (durch zwei der drei Geraden bestimmte) Punkt m' entspricht dem m in der fraglichen Verwandtschaft*).

*) Ueber diese Verwandtschaft vgl. z. B. Steiner, Vorlesungen, B. 2, pag. 316.

Es liegt auf der Hand, dass die Beziehung zwischen zwei Punkten *m m'* reciprok ist; die Ecken des Vierecks entsprechen sich selbst, einer Ecke des Dreiecks *p q r* entsprechen alle Punkte der gegenüberliegenden Seite, den Punkten einer Geraden entsprechen alle Punkte eines dem Dreieck *p q r* umschriebenen Kegelschnitts, der, wenn die Gerade durch eine Ecke des Dreiecks geht, in die vierte Harmonische zur Geraden in Bezug auf die beiden in der Ecke sich schneidenden Seiten des Vierecks und in die der Ecke gegenüberliegende Dreiecksseite zerfällt; zu allen möglichen Geraden gehören auf diese Weise alle möglichen dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte. Den Punkten eines Kegelschnitts entsprechen die Punkte einer Curve vierten Grades, welche *p q r* zu Doppelpunkten hat; wenn der Kegelschnitt durch eine Ecke des Dreiecks geht, so zerfällt diese Curve in die der Ecke gegenüberliegende Seite und eine Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkt in der Ecke; geht der Kegelschnitt durch zwei Ecken, so zerfällt die Curve in die beiden diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten und einen ebenfalls durch die beiden Ecken gehenden Kegelschnitt; geht endlich der Kegelschnitt durch alle drei Ecken, so zerfällt die Curve in die drei Seiten und noch eine vierte Gerade; zu allen möglichen Kegelschnitten gehören auf diese Weise alle möglichen Curven vierten Grades mit den Doppelpunkten *p q r*.

So oft von einer solchen Verwandtschaft Gebrauch gemacht wird, sollen zwei einander entsprechende Punkte durch dasselbe, einmal mit einem Accent versehene Symbol bezeichnet werden *).

Dnrch Anwendung einer solchen Verwandtschaft kann man nun die vorliegende Aufgabe folgendermaassen lösen: Man suche zu den Punkten 1 2 3 4 die entsprechenden

*) Zur Construction des einem gegebenen entsprechenden Punktes reicht das Lineal aus.

$1' \, 2' \, 3' \, 4'$, dann liegen alle Punkte x', für welche

$$(x')\,1\,2\,3\,4 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$$

auf einem ganz bestimmten Kegelschnitt und es kann umgekehrt jeder Punkt dieses Kegelschnitts für x' genommen werden. Demnach werden alle Punkte und nur die Punkte der Curve vierten Grades C''', welche jenem Kegelschnitt entspricht und also $p\ q\ r$ zu Doppelpunkten, 1 2 3 4 zu einfachen Punkten hat, der Forderung der Aufgabe genügen.

An die Lösung der Aufgabe soll noch eine Bemerkung geknüpft werden, welche sich später als nützlich erweisen wird.

Betrachtet man von den gegebenen Punkten

$$p\,q\,r\,1\,2\,3\,4$$

zwei, $p\,q$, als Doppelpunkte und fügt noch zwei andere beliebig gewählte, $a\,b$, hinzu, so ist durch das System

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,1\,2\,3\,4\,a\,b$$

ein Büschel von Curven vierten Grades C'' bestimmt *). Jede solche Curve C'' kann erzeugt werden vom Kegelschnittbüschel $(p\,q\,a\,b)$ in Verbindung mit einem andern, zu dessen Grundpunkten $p\ q\ r$ gehören. Nennt man den vierten Grundpunkt dieses zweiten Büschels x, so muss

$$(p\,q\,r\,x)\,1\,2\,3\,4 \barwedge (p\,q\,a\,b)\,1\,2\,3\,4$$

werden; demnach ist der Ort von x die vorhin gefundene Curve C''', wenn man nur an Stelle der Elemente $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ die Kegelschnitte $(p\,q\,a\,b)\,1\,2\,3\,4$ setzt. Ist der Büschel C'' gegeben durch irgend zwei specielle solche Curven C_1'' und C_2'' und werden diese von dem Kegelschnittbüschel $(p\,q\,a\,b)$ in Verbindung mit je den Büscheln $(p\,q\,r\,x_1)$ und $(p\,q\,r\,x_2)$ erzeugt, so sind diese letzteren zu einem und demselben dritten, also auch unter sich projectivisch und erzeugen die zum Büschel der C'' gehörige Curve C'''.

---

*) Die hier angewendete Bezeichnungsweise, nach welcher unter den Bestimmungsstücken einer Curve auftretende Doppelpunkte durch eine 2 über dem betreffenden Buchstaben ausgezeichnet werden, soll, als sehr bequem, auch künftig beibehalten werden.

Das Verhältniss der Curve C''' zum Büschel der Curven C'' kann noch etwas anders aufgefasst werden. Alle Curven C'' haben ausser den Punkten

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,1\,2\,3\,4\,a\,b$$

noch einen weiteren, durch diese bestimmten, Punkt u mit einander gemein. Dieser muss auf der C''' liegen, denn denkt man sich den Büschel der C'' durch die beiden speciellen Curven C_1'' und C_2'' bestimmt, so entsprechen in der projectivischen Beziehung zwischen den die C_1'' erzeugenden Büscheln $(p\,q\,r\,x_1)$ und $(p\,q\,a\,b)$ einander die Kegelschnitte

$$(p\,q\,r\,x_1\,u) \text{ und } (p\,q\,a\,b\,u)$$

weil u auf C_1'' liegt; ebenso entsprechen in der projectivischen Beziehung zwischen den die C_2'' erzeugenden Büscheln $(p\,q\,r\,x_2)$ und $(p\,q\,a\,b)$ einander die Kegelschnitte

$$(p\,q\,r\,x_2\,u) \text{ und } (p\,q\,a\,b\,u).$$

Es werden also in der projectivischen Beziehung zwischen den die C'' erzeugenden Büscheln $(p\,q\,r\,x_1)$ und $(p\,q\,r\,x_2)$ die Kegelschnitte

$$(p\,q\,r\,x_1\,u) \text{ und } (p\,q\,r\,x_2\,u)$$

einander entsprechen, d. h. der Punkt u liegt auf der C'''. Nun kann man aber die Curve C'' als durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,\overset{2}{r}\,1\,2\,3\,4\,u$$

bestimmt ansehn, ferner ist der zu einer Curve C'' gehörige Punkt x der einzige, welchen diese Curve ausser

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,4\,u$$

noch mit C''' gemeinsam hat, demnach gilt der Satz:

Ist

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b\,u$$

ein System von Punkten, durch welche eine Schaar von Curven vierten Grades C'' geht, greift man ferner von den einfachen Punkten zwei beliebige, $a\,b$, und von den übrigen noch einen beliebigen, r, heraus, so ist durch das System $\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,\overset{2}{r}\,1\,2\,3\,4\,u$ eine Curve C''' vierten Grades bestimmt, von den Schnittpunkten irgend einer C'' mit C''' fallen fünfzehn in die Punkte $p\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,u$,

der sechszehnte, x, ist der vierte Grundpunkt eines Kegelschnitt-büschels $(p\,q\,r\,x)$, welcher mit dem Büschel $(p\,q\,a\,b)$ die C'' erzeugt.

§. 6.

Die zweite Aufgabe des §. 3 war:

Wenn gegeben sind die Punkte

$$p\,q\,r\;1\,2\,3\,4\,5$$

ferner fünf Elemente $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5$ eines einförmigen Gebildes, einen Punkt x zu finden, für welchen

$$(p\,q\,r\,x)\;1\;2\;3\;4\;5\;\overline{\wedge}\;\alpha_1\;\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5.$$

Für den gesuchten Punkt erhält man nach §. 5 zwei Oerter, nämlich eine Curve vierten Grades, deren Punkte x der Bedingung

$$(p\,q\,r\,x)\,2\;3\;4\;5\;\overline{\wedge}\;\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5$$

und eine zweite solche Curve, deren Punkte x der Bedingung

$$(p\,q\,r\,x)\,1\;3\;4\;5\;\overline{\wedge}\;\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5$$

genügen. Es handelt sich also darum, den einen Punkt zu finden, welchen diese beiden Curven ausser den Doppelpunkten $p\,q\,r$ und den einfachen $3\,4\,5$ noch gemeinsam haben.

Statt dieser Aufgabe soll nun eine etwas allgemeinere gelöst werden, deren Construction später gebraucht werden wird, nämlich *die vier Punkte zu finden, in welchen sich zwei durch die Doppelpunkte $p\,q\,r$ und je fünf einfache $h\,i\,k\,l\,m$ resp. $h_1\,i_1\,k_1\,l_1\,m_1$ gegebene Curven vierten Grades noch schneiden.* Diese Aufgabe lässt sich sehr einfach vermittelst der in §. 5 beschriebenen geometrischen Verwandtschaft construiren. Man hat nämlich nur nöthig, zu den beiden Gruppen von je fünf Punkten die entsprechenden $h'\ldots m'$ und $h'_1\ldots m'_1$ zu suchen, dann die Schnittpunkte der beiden durch diese bestimmten Kegelschnitte und endlich wieder die diesen Schnittpunkten entsprechenden Punkte.

Im hier vorliegenden Falle sind die beiden Kegelschnitte durch je vier Punkte $2'\,3'\,4'\,5'$ resp. $1'\,3'\,4'\,5'$ und eine hinzu-

tretende Bedingung bestimmt. Sie haben drei Punkte gemeinsam, ihr vierter Schnittpunkt und mit ihm der gesuchte Punkt kann daher vermittelst des Lineals allein gefunden werden.

§. 7.

Die dritte Aufgabe lautet:
Wenn gegeben sind die Punkte

$$p\,q\;1\,2\,3\,4\,5\,6$$

ferner 6 Elemente $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6$ *irgend eines einförmigen Gebildes, alle Punktpaare* $x\,y$ *zu finden, für welche*

$$(p\,q\,x\,y)\;1\,2\,3\,4\,5\,6 \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6.$$

Sie ist, wie schon bemerkt, unbestimmt, es giebt unendlich viele Punktpaare $x\,y$; oder, wie man auch sagen kann, es giebt unendlich viele Gruppen von je sechs Kegelschnitten

$$K_1\;\;K_2\;\;K_3\;\;K_4\;\;K_5\;\;K_6$$

welche einen Büschel, zu dessen Grundpunkten $p\,q$ gehören, bilden, ferner durch je die Punkte 1 2 3 4 5 6 gehen und der Bedingung

$$K_1\;\;K_2\;\;K_3\;\;K_4\;\;K_5\;\;K_6 \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6$$

genügen.

Eine erste solche Gruppe, deren Kegelschnitte

$$K_1^{(1)}\;K_2^{(1)}\;K_3^{(1)}\;K_4^{(1)}\;K_5^{(1)}\;K_6^{(1)}$$

heissen mögen, erhält man, indem man zunächst einen Punkt $x^{(1)}$ sucht (§. 6), so dass

$$(p\,q\,1\,x^{(1)})\;2\,3\,4\,5\,6 \;\overline{\wedge}\; \alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6$$

und die fünf Kegelschnitte des links stehenden Büschels für

$$K_2^{(1)}\;K_3^{(1)}\;K_4^{(1)}\;K_5^{(1)}\;K_6^{(1)}$$

nimmt; $K_1^{(1)}$ ergiebt sich dann als Kegelschnitt, welcher dem Element α_1 in der projectivischen Beziehung zwischen dem Büschel $(p\,q\,1\,x^{(1)})$ und den α entspricht.

Eine zweite Gruppe, deren Kegelschnitte

$$K_1^{(2)}\;K_2^{(2)}\;K_3^{(2)}\;K_4^{(2)}\;K_5^{(2)}\;K_6^{(2)}$$

heissen mögen, ergiebt sich, wenn man in ähnlicher Weise, wie eben, einen Punkt $x^{(2)}$ sucht, so dass

$$(p\, q\, 2\, x^{(2)}\, 1\, 3\, 4\, 5\, 6 \;\barwedge\; \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6$$

und wiederum für

$$K_1^{(2)}\; K_3^{(2)}\; K_4^{(2)}\; K_5^{(2)}\; K_6^{(2)}$$

die fünf Kegelschnitte links nimmt, für $K_2^{(2)}$ aber denjenigen demselben Büschel angehörigen Kegelschnitt, welcher in der projectivischen Beziehung zwischen diesem Büschel und den α dem Element α_2 entspricht.

Die beiden so gewonnenen Gruppen von Kegelschnitten

$$K_1\; K_2\; K_3\; K_4\; K_5\; K_6$$

geben nun unendlich viele solche Gruppen. Denn es ist zunächst

$$K_1^{(1)}\, K_2^{(1)}\, K_3^{(1)}\, K_4^{(1)}\, K_5^{(1)}\, K_6^{(1)} \;\barwedge\; K_1^{(2)}\, K_2^{(2)}\, K_3^{(2)}\, K_4^{(2)}\, K_5^{(2)}\, K_6^{(2)}$$

Ferner fällt kein Kegelschnitt des einen Systems mit seinem entsprechenden im andern zusammen. Wollte man nämlich annehmen, dass $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ identisch wären, so läge der Punkt 2 auf $K_1^{(1)}$ und es wären also auch $K_1^{(1)}$ und $K_2^{(1)}$ identisch, was unmöglich. Es bestimmen somit die 6 Kegelschnittpaare

$$\begin{matrix} K_1^{(1)} & K_1^{(2)} \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ K_6^{(1)} & K_6^{(1)} \end{matrix}$$

ebenso viele Kegelschnittbüschel. Demnach sind die Voraussetzungen des Hülfssatzes (§. 4) erfüllt und man kann behaupten, dass für jeden beliebigen Kegelschnitt des ersten dieser Büschel eine durch ihn bestimmte Gruppe

$$K_1\; K_2\; K_3\; K_4\; K_5\; K_6$$

existirt, welcher er angehört.

Weiter kann man aber behaupten, dass man auf diese Weise alle Gruppen von Kegelschnitten

$$K_1\; K_2\; K_3\; K_4\; K_5\; K_6$$

erhält, welche überhaupt existiren. Denn gäbe es eine solche Gruppe, deren Kegelschnitt K_1 nicht dem von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ definirten Büschel angehörte, so würde eine wiederholte Anwendung des Hülfssatzes ergeben, dass jeder durch die Punkte $p\,q\,1$ gehende Kegelschnitt die Rolle von K_1 spielen könne. Dies setzt aber, wie man sieht, wenn man etwa den durch die fünf Punkte $p\,q\,1\,2\,3$ bestimmten Kegelschnitt für K_1 zu nehmen versucht, ganz specielle Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken

$$p\,q\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3\;\alpha_4\;\alpha_5\;\alpha_6$$

voraus, und solche specielle Beziehungen sollen ein für allemal ausgeschlossen werden.

Wenn man daher wie früher vermittelst der Punkte 1, 2, so jetzt mit Hülfe der Punkte 3, 4, 5, 6 noch vier andere Punkte $x^{(3)}\;x^{(4)}\;x^{(5)}\;x^{(6)}$ und zu ihnen gehörige specielle Gruppen

$$K_1\quad K_2\quad K_3\quad K_4\quad K_5\quad K_6$$

nämlich

$$K_1^{(3)}\; K_2^{(3)}\; K_3^{(3)}\; K_4^{(3)}\; K_5^{(3)}\; K_6^{(3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_1^{(6)}\; K_2^{(6)}\; K_3^{(6)}\; K_4^{(6)}\; K_5^{(6)}\; K_6^{(6)}$$

aufsucht, so folgt, dass die sämmtlichen K_1 unter ihnen dem von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Büschel angehören, ebenso die K_2 zu dem von $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ bestimmten Büschel u. s. w.

Nun schneiden $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ einander ausser in den drei Punkten $p\,q\,1$ in noch einem vierten Punkt h_1, $K_2^{(1)}$ und $K_2^{(2)}$ ausser in $p\,q\,2$ in noch einem vierten Punkt h_2, u. s. w., endlich schneiden sich $K_6^{(1)}$ und $K_6^{(2)}$ ausser in $p\,q\,6$ in noch einem Punkt h_6. Durch h_1 müssen nach dem bewiesenen auch alle andern K_1, also auch

$$K_1^{(3)}\; K_1^{(4)}\; K_1^{(5)}\; K_1^{(6)}$$

gehen, durch h_2 alle andern K_2, also auch

$$K_2^{(3)}\; K_2^{(4)}\; K_2^{(5)}\; K_2^{(6)}$$

u. s. w. Demnach kann man dem gewonnenen Resultate jetzt den folgenden Ausdruck geben, wenn man noch berücksichtigt, dass die Punkte $h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, h_5\, h_6$ schon mehr als bestimmt sind, wenn man die Kegelschnitte

$$K_1^{(1)}\ K_2^{(2)}\ K_3^{(3)}\ K_4^{(4)}\ K_5^{(5)}\ K_6^{(6)}$$

ausser Acht lässt.

Man bestimme einen Punkt $x^{(1)}$, so dass

$$(p\, q\, 1\, x^{(1)})\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \barwedge \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6$$

ferner einen Punkt $x^{(2)}$, so dass

$$(p\, q\, 2\, x^{(2)})\ 1\ 3\ 4\ 5\ 6 \barwedge \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6$$

u. s. w., endlich einen Punkt $x^{(6)}$, so dass

$$(p\, q\, 6\, x^{(6)})\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \barwedge \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5.$$

Alsdann schneiden sich die fünf Kegelschnitte

$$K_1^{(2)} = (p\, q\, 1\, 2\, x^{(2)})$$
$$K_1^{(3)} = (p\, q\, 1\, 3\, x^{(3)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_1^{(6)} = (p\, q\, 1\, 6\, x^{(6)})$$

ausser in den Punkten $p\, q\, 1$ in noch einem Punkt h_1, ebenso schneiden sich die fünf Kegelschnitte

$$K_2^{(1)} = (p\, q\, 2\, 1\, x^{(1)})$$
$$K_2^{(3)} = (p\, q\, 2\, 3\, x^{(3)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_2^{(6)} = (p\, q\, 2\, 6\, x^{(6)})$$

ausser in den Punkten $p\, q\, 2$ in noch einem Punkte h_2 u. s. w., endlich schneiden sich die Kegelschnitte

$$K_6^{(1)} = (p\, q\, 6\, 1\, x^{(1)})$$
$$K_6^{2)} = (p\, q\, 6\, 2\, x^{(2)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_6^{(5)} = (p\, q\, 6\, 5\, x^{(5)})$$

ausser in $p\, q\, 6$ in noch einem Punkte h_6.

Sollen nun die Kegelschnitte

$$K_1\, K_2\, K_3\, K_4\, K_5\, K_6$$

demselben Büschel angehören, ferner durch resp. die Punkte 1 2 3 4 5 6 gehen und endlich eine zur Reihe $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6$ projectivische Gruppe bilden, so muss K_1 durch h_1, K_2 durch h_2 u. s. w., K_6 durch h_6 gehen und es sind durch einen dieser Kegelschnitte die andern bestimmt.

Es ist nun sehr leicht, eine klare Anschauung von den sämmtlichen der Aufgabe genügenden Punktpaaren $x\,y$ zu erhalten. Auf jedem Kegelschnitt K_1 des Büschels $(p\,q\,1\,h_1)$ muss ein solches Punktpaar liegen, dieses erhält man als zweites Paar von Schnittpunkten des Kegelschnitts K_1 mit dem ihm zugehörigen K_2, dieser Kegelschnitt K_2 aber ist leicht zu finden, denn nach dem Hülfssatz sind die Büschel $(p\,q\,1\,h_1)$ und $(p\,q\,2\,h_2)$, denen K_1 und K_2 angehören, projectivisch so aufeinander bezogen, dass den Kegelschnitten

$$K_1^{(1)}\quad K_1^{(2)}\quad K_1^{(3)}\quad K_1^{(4)}\quad K_1^{(5)}\quad K_1^{(6)}$$

von $(p\,q\,1\,h_1)$ die Kegelschnitte

$$K_2^{(1)}\quad K_2^{(2)}\quad K_2^{(3)}\quad K_2^{(4)}\quad K_2^{(5)}\quad K_2^{(6)}$$

von $(p\,q\,2\,h_2)$ der Reihe nach entsprechen (die vorhin weggelassenen Kegelschnitte

$$K_1^{(1)}\quad K_2^{(2)}\quad K_3^{(3)}\quad K_4^{(4)}\quad K_5^{(5)}\quad K_6^{(6)}$$

sollen hier wieder zugefügt werden) und es gehören K_1 und K_2 in dieser projectivischen Beziehung zu einander. Der Ort der Punktpaare $x\,y$ ist demnach die von den Büscheln $(p\,q\,1\,h_1)$ und $(p\,q\,2\,h_2)$ erzeugte Curve vierten Grades C''. Dieselbe Curve C'' wird vom Büschel $(p\,q\,1\,h_1)$ auch mit jedem der Büschel

$$(p\,q\,3\,h_3)$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$(p\,q\,6\,h_6)$$

und nicht minder von irgend zweien der Büschel

$$(p\,q\,1\,x^{(1)})$$
$$(p\,q\,2\,x^{(2)})$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$(p\,q\,6\,x^{(6)})$$

erzeugt. Sie geht demnach durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,1\,2\,3\,4\,5\,6\;x^{(1)}\,x^{(2)}\,x^{(3)}\,x^{(4)}\,x^{(5)}\,x^{(6)}\;h_1\,h_2\,h_3\,h_4\,h_5\,h_6.$$

Ferner wird sie in den Punkten

1 2 3 4 5 6

von resp. den Kegelschnitten

$$K_1^{(1)}\;K_2^{(2)}\;K_3^{(3)}\;K_4^{(4)}\;K_5^{(5)}\;K_6^{(6)}$$

berührt. Jeder Punkt der C'' gehört zu einem bestimmten Paare $x\,y$,

$$1\,x^{(1)},\;2\,x^{(2)},\;3\,x^{(3)},\;4\,x^{(4)},\;5\,x^{(5)},\;6\,x^{(6)}$$

sind die zu den Punkten 1 2 3 4 5 6 gehörenden speciellen Paare $x\,y$.

Auch hier lassen sich ähnliche Bemerkungen anschliessen, wie zu Ende des §. 5.

Man füge zu den gegebenen Punkten $p\,q$ 1 2 3 4 5 6 noch drei andere, willkürlich gewählte, $a\,b\,c$. Alsdann bestimmen die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,a\,b\,c$$

einen Büschel von Curven vierten Grades C'. Jede solche Curve kann erzeugt werden durch den Kegelschnittbüschel $(p\,a\,b\,c)$ in Verbindung mit noch einem andern, zu dessen Grundpunkten $p\,q$ gehören, nennt man die beiden andern Grundpunkte $x\,y$, so muss man haben

$$(p\,q\,x\,y)\;1\,2\,3\,4\,5\,6 \;\overline{\wedge}\; (p\,a\,b\,c)\,1\,2\,3\,4\,5\,6.$$

Demnach ist der Ort sämmtlicher Paare $x\,y$ die vorhin gefundene Curve C'', wenn man die Elemente $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6$ durch die Kegelschnitte $(p\,a\,b\,c)$ 1 2 3 4 5 6 ersetzt.

Ist der Büschel der Curven C' definirt durch irgend zwei specielle, vom Kegelschnittbüschel $(p\,a\,b\,c)$ mit Hülfe je der Büschel

$$(p\,q\,x_1\,y_1) \text{ und } (p\,q\,x_2\,y_2)$$

erzeugte Curven C'_1 und C'_2 so existirt auch zwischen den zu ein und demselben dritten projectivischen Büscheln

$$(p\,q\,x_1\,y_1) \text{ und } (p\,q\,x_2\,y_2)$$

eine projectivische Beziehung und es erzeugen diese Büschel die C''.

Die Curven C' haben ausser den Punkten

$$\overset{2}{p}\, q\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, a\, b\, c$$

noch zwei andere, $u\, v$, mit einander gemein, von denen man ebenso wie im analogen Falle des §. 5 zeigen kann, dass sie auf der C'' liegen müssen. Durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\, \overset{2}{q}\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, u\, v$$

ist aber die Curve C'' vollkommen bestimmt; ferner sind die zu einer Curve C' gehörigen Punkte $x\, y$ die einzigen, welche diese C' ausser $p\, q\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, u\, v$ noch mit C'' gemeinsam hat; demnach gilt der Satz:

Ist

$$\overset{2}{p}\, q\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, a\, b\, c\, u\, v$$

ein System von Punkten, durch welche unendlich viele Curven vierten Grades C' gehen und greift man von den einfachen Punkten zuerst irgend drei, $a\, b\, c$, dann aus den übrigen noch einen, q, beliebig heraus, so ist durch das System

$$\overset{2}{p}\, \overset{2}{q}\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, u\, v$$

eine Curve vierten Grades C'' bestimmt; von den Schnittpunkten irgend einer C' mit C'' fallen 14 in die Punkte $p\, q\, 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, u\, v$; die beiden übrigen bilden mit $p\ q$ die Grundpunkte desjenigen Kegelschnittbüschels, welcher mit $(p\ a\ b\ c)$ die C' erzeugt).*

§. 8.

Für die vierte Aufgabe des §. 3,

Wenn gegeben sind die Punkte

$$p\, q\; 1\, 2\, 3\, 4\, 5\, 6\, 7$$

---

*) Zur Construction ist noch zu bemerken, dass man die Punkte $x^{(1)}\, x^{(2)}\, x^{(3)}\, x^{(4)}\, x^{(5)}\, x^{(6)}$, $h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, h_5\, h_6$ und mit ihnen solche projectivische Kegelschnittbüschel, welche die C'' erzeugen, vermittelst des Lineals allein finden kann.

ferner 7 Elemente eines einförmigen Gebildes

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7,$$

ein Punktpaar $x\,y$ *zu finden, so dass*

$$(p\,q\,x\,y)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\ \overline{\wedge}\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$$

ergiebt sich jetzt mit Hülfe von §. 7 folgende Lösung:

Man bezeichne die sieben Kegelschnitte

$$(p\,q\,x\,y)\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7$$

mit

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7.$$

Nun ersetze man die Bestimmungsstücke

$$p\,q\,1\,2\,3\,4\,5\,6\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$$

der vorigen Aufgabe durch die Stücke

$$p\,q\,2\,3\,4\,5\,6\,7\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$$

und suche die bei der Lösung dieser Aufgabe auftretenden, damals mit $h_1\ h_2\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6$ bezeichneten Punkte, welche hier

$$h_2^{(1)}\ h_3^{(1)}\ h_4^{(1)}\ h_5^{(1)}\ h_6^{(1)}\ h_7^{(1)}$$

heissen sollen. Durch diese Punkte müssen alsdann die Kegelschnitte

$$K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7$$

der Reihe nach gehen.

Ferner ersetze man die Bestimmungsstücke der vorigen Aufgabe durch die Stücke:

$$p\,q\,1\,3\,4\,5\,6\,7\ \alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7$$

und construire wieder die dort mit $h_1\ h_2\ h_3\ h_4\ h_5\ h_6$ bezeichneten Punkte; die gefundenen Punkte mögen hier

$$h_1^{(2)}\ h_3^{(2)}\ h_4^{(2)}\ h_5^{(2)}\ h_6^{(2)}\ h_7^{(2)}$$

genannt werden. Diese Punkte werden resp. den Kegelschnitten

$$K_1\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7$$

angehören.

Indem man so fortfährt, gelangt man im Ganzen zu sieben Systemen von je sechs Punkten, nämlich:

$$\begin{array}{ccccc} & h_2^{(1)} & h_3^{(1)} \,.\,. & h_6^{(1)} & h_7^{(1)} \\ h_1^{(2)} & & h_3^{(2)} \,.\,. & h_6^{(2)} & h_7^{(2)} \\ h_1^{(3)} & h_2^{(3)} & \,.\,. & h_6^{(3)} & h_7^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1^{(7)} & h_2^{(7)} & h_3^{(7)} \,.\,. & h_6^{(7)} & \end{array}$$

Die sechs Punkte h_1 müssen auf dem Kegelschnitt K_1, die sechs Punkte h_2 auf K_2, u. s. w. liegen. Dadurch sind diese Kegelschnitte mehr als bestimmt, irgend zwei unter ihnen geben die gesuchten Punkte $x\,y$*).

§. 9.

Ganz in derselben Weise, wie zur Lösung der dritten Aufgabe die zweite benutzt wurde, soll jetzt mit Hülfe der vierten die f ü n f t e, *wenn gegeben sind die Punkte*

$$p\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8$$

und die Elemente

$$\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3\;\alpha_4\;\alpha_5\;\alpha_6\;\alpha_7\;\alpha_8$$

eines einförmigen Gebildes, alle Gruppen $x\,y\,z$ zu finden, für welche

$$(p\;x\;y\;z)\;1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8 \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3\;\alpha_4\;\alpha_5\;\alpha_6\;\alpha_7\;\alpha_8.$$

gelöst werden.

Hier sind alle möglichen Gruppen von je acht einem und demselben Büschel, unter dessen Grundpunkten sich p befindet, angehörenden Kegelschnitten

$$K_1\;K_2\;K_3\;K_4\;K_5\;K_6\;K_7\;K_8$$

zu finden, welche je durch die Punkte 1 2 3 4 5 6 7 8 gehen und der Bedingung

*) Die Construction verlangt Lineal und Zirkel; nimmt man aber einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt zu Hülfe, so lässt sie sich mit dem Lineal allein ausführen.

$$K_1\, K_2\, K_3\, K_4\, K_5\, K_6\, K_7\, K_8 \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6\, \alpha_7\, \alpha_8$$

genügen.

Eine erste solche Gruppe

$$K_1^{(1)}\; K_2^{(1)}\; K_3^{(1)}\; K_4^{(1)}\; K_5^{(1)}\; K_6^{(1)}\; K_7^{(1)}\; K_8^{(1)}$$

erhält man, wenn man dem Punkte p den Punkt 1 zugesellt und nun nach der in §. 8 beschriebenen Methode ein Punktpaar $x^{(1)}\, y^{(1)}$ sucht, so dass

$$(p\; 1\; x^{(1)}\, y^{(1)})\; 2\; 3\; 4\; 5\; 6\; 7\; 8 \;\overline{\wedge}\; \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6\, \alpha_7\, \alpha_8$$

indem man sodann die links stehenden sieben Kegelschnitte für

$$K_2^{(1)}\; K_3^{(1)}\; K_4^{(1)}\; K_5^{(1)}\; K_6^{(1)}\; K_7^{(1)}\; K_8^{(1)}$$

nimmt und endlich den Kegelschnitt $K_1^{(1)}$ so bestimmt, dass er ebenfalls durch die Punkte $p\; 1\; x^{(1)}\; y^{(1)}$ geht und dass

$$K_1^{(1)}\; K_2^{(1)}\; K_3^{(1)}\; K_4^{(1)}\; K_5^{(1)}\; K_6^{(1)}\; K_7^{(1)}\; K_8^{(1)} \;\overline{\wedge}\; \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4\, \alpha_5\, \alpha_6\, \alpha_7\, \alpha_8$$

Eine zweite Gruppe entsteht, wenn man dasselbe Verfahren anwendet, jedoch die Bestimmungsstücke $1\,\alpha_1$ und $2\,\alpha_2$ ihre Rollen wechseln lässt.

Hierbei erhält man wiederum ein Punktpaar $x^{(2)}\, y^{(2)}$, dieses bildet mit den Punkten $p\; 2$ die Grundpunkte eines Büschels, dem die Kegelschnitte

$$K_1^{(2)}\; K_2^{(2)}\; K_3^{(2)}\; K_4^{(2)}\; K_5^{(2)}\; K_6^{(2)}\; K_7^{(2)}\; K_8^{(2)}$$

angehören.

Kein Kegelschnitt der einen dieser Gruppen fällt mit seinem entsprechenden in der andern zusammen. Denn wollte man annehmen, dass etwa $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ identisch wären, so läge der Punkt 2 auf $K_1^{(1)}$ und es wären also auch $K_1^{(1)}$ und $K_2^{(1)}$ identisch, was nicht möglich ist. Somit bestimmen die acht Kegelschnittpaare

$$\begin{matrix} K_1^{(1)} & K_1^{(2)} \\ K_2^{(1)} & K_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ K_8^{(1)} & K_8^{(2)} \end{matrix}$$

ebenso viele Kegelschnittbüschel und es sind auch hier die

Voraussetzungen des Hülfssatzes erfüllt. Durch Anwendung dieses Satzes erhält man aber wieder aus jenen beiden Gruppen von Kegelschnitten $K_1 \ldots K_8$ unendlich viele, ein Kegelschnitt einer jeden solchen Gruppe kann aus dem betreffenden Büschel willkürlich gewählt werden und sind dadurch die andern völlig bestimmt.

Die so gefundenen Gruppen

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7\ K_8$$

sind nun die einzigen überhaupt vorhandenen. Denn wollte man annehmen, es existire eine solche Gruppe, deren Kegelschnitt K_1 nicht zu dem von $K_1^{(1)}$ und $K_1^{(2)}$ bestimmten Büschel gehörte, so würde man durch mehrmalige Anwendung des Hülfssatzes auch zu einer Gruppe kommen können, deren K_1 durch die Punkte 2 und 3 ginge. Dies würde aber wieder ganz spezielle Beziehungen zwischen den gegebenen Stücken voraussetzen; solche Beziehungen sind aber ein für allemal ausgeschlossen. Wenn man demnach noch sechs andere Punktpaare $x\,y$ nämlich

$$x^{(3)}\,y^{(3)},\ x^{(4)}\,y^{(4)}\ x^{(5)}\,y^{(5)},\ x^{(6)}\,y^{(6)},\ x^{(7)}\,y^{(7)},\ x^{(8)}y^{(8)}$$

und sechs andere zu ihnen gehörige specielle Gruppen

$$\begin{array}{cccccccc}
K_1^{(3)} & K_2^{(3)} & K_3^{(3)} & K_4^{(3)} & K_5^{(3)} & K_6^{(3)} & K_7^{(3)} & K_8^{(3)} \\
K_1^{(4)} & K_2^{(4)} & K_3^{(4)} & K_4^{(4)} & K_5^{(4)} & K_6^{(4)} & K_7^{(4)} & K_8^{(4)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
K_1^{(8)} & K_2^{(8)} & K_3^{(8)} & K_4^{(8)} & K_5^{(8)} & K_6^{(8)} & K_7^{(8)} & K_8^{(8)}
\end{array}$$

aufsucht, indem man, wie eben die Stücke $2\,\alpha_2$, jetzt successive die Stücke $3\,\alpha_3$, $4\,\alpha_4$, $5\,\alpha_5$, $6\,\alpha_6$, $7\,\alpha_7$, $8\,\alpha_8$ an Stelle von $1\alpha_1$ treten lässt, so ergiebt sich, dass die Kegelschnitte

$$K_1^{(1)}\ K_1^{(2)}\ K_1^{(3)}\ K_1^{(4)}\ K_1^{(5)}\ K_1^{(6)}\ K_1^{(7)}\ K_1^{(8)}$$

sämmtlich ausser den Punkten $p\,1$ noch ein anderes Punktpaar $h_1 i_1$ gemeinsam haben müssen; ebenso haben

$$K_2^{(1)}\ K_2^{(2)}\ K_2^{(3)}\ K_2^{(4)}\ K_2^{(5)}\ K_2^{(6)}\ K_2^{(7)}\ K_2^{(8)}$$

ausser $p\,2$ noch ein Punktpaar $h_2 i_2$,

$$K_3^{(1)}\ K_3^{(2)}\ K_3^{(3)}\ K_3^{(4)}\ K_3^{(5)}\ K_3^{(6)}\ K_3^{(7)}\ K_3^{(8)}$$

ausser p 3 noch ein Punktpaar $h_3 i_3$ u. s. w., endlich

$$K_8^{(1)}\ K_8^{(2)}\ K_8^{(3)}\ K_8^{(4)}\ K_8^{(5)}\ K_8^{(6)}\ K_8^{(7)}\ K_8^{(8)}$$

ausser p 8 noch ein Punktpaar $h_8 i_8$ gemeinsam.

Zwischen den Büscheln

$$(p\ 1\ h_1\ i_1),\ (p\ 2\ h_2\ i_2)\ .\ .\ .\ .\ .\ (p\ 7\ h_7\ i_7)\ (p\ 8\ h_8\ i_8)$$

bestehen (nach dem Hülfssatz) projectivische Beziehungen, welche dadurch mehr als bestimmt sind, dass den Kegelschnitten

$$K_1^{(1)}\ K_1^{(2)}\ K_1^{(3)}\ K_1^{(4)}\ K_1^{(5)}\ K_1^{(6)}\ K_1^{(7)}\ K_1^{(8)}$$

des ersten im zweiten die Kegelschnitte

$$K_2^{(1)}\ K_2^{(2)}\ K_2^{(3)}\ K_2^{(4)}\ K_2^{(5)}\ K_2^{(6)}\ K_2^{(7)}\ K_2^{(8)}$$

im dritten die Kegelskhnitte

$$K_3^{(1)}\ K_3^{(2)}\ K_3^{(3)}\ K_3^{(4)}\ K_3^{(5)}\ K_3^{(6)}\ K_3^{(7)}\ K_3^{(8)}$$

u. s. w., endlich im letzten die Kegelschnitte

$$K_8^{(1)}\ K_8^{(2)}\ K_8^{(8)}\ K_8^{(4)}\ K_8^{(5)}\ K_8^{(6)}\ K_8^{(7)}\ K_8^{(8)}$$

entsprechen. Die acht Kegelschnitte einer Gruppe:

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7\ K_8$$

entsprechen einander in diesen projectivischen Beziehungen und es ist demnach leicht, wenn ein Kegelschnitt einer solchen Gruppe gegeben ist, die übrigen zu finden.

Diese Resultate sollen jetzt nach Analogie der §§. 5 und 7 benutzt werden, um eine Uebersicht über alle möglichen Gruppen je dreier Punkte $x\ y\ z$ zu gewinnen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Auf jedem Kegelschnitt K_1 liegt eine Gruppe $x\ y\ z$, diese erhält man durch einen der zu K_1 gehörigen Kegelschnitte $K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7\ K_8$, welche ja dem K_1 ausser in p in den Punkten $x\ y\ z$ begegnen. Der Ort aller Gruppen $x\ y\ z$ ist die von irgend zweien der projectivischen Büschel

$$(p\ 1\ h_1\ i_1),\ (p\ 2\ h_2\ i_2)\ .\ .\ .\ .\ .\ (p\ 7\ h_7\ i_7),\ (p\ 8\ h_8\ i_8)$$

und nicht minder von zweien der projectivischen Büschel

$$(p\ 1\ x^{(1)}\ y^{(1)}),\ (p\ 2\ x^{(2)}\ y^{(2)})\ .\ .\ .\ .\ .\ (p\ 7\ x^{(7)}\ y^{(7)})\ (p\ 8\ x^{(8)}\ y^{(8)})$$

erzeugte Curve vierten Grades C', welche durch die Punkte

$\overset{2}{p}$, 1 2 3 4 5 6 7 8, $h_1\, i_1$, $h_2\, i_2$, $h_3\, i_3$, $h_4\, i_4$, $h_5\, i_5$, $h_6\, i_6$, $h_7\, i_7$, $h_8\, i_8$

$x^{(1)}\, y^{(1)}$, $x^{(2)}\, y^{(2)}$, $x^{(3)}\, y^{(3)}$, $x^{(4)}\, y^{(4)}$, $x^{(5)}\, y^{(5)}$, $x^{(6)}\, y^{(6)}$, $x^{(7)}\, y^{(7)}$, $x^{(8)}\, y^{(8)}$

geht, und in den Punkten

1 2 3 4 5 6 7 8

von resp. den Kegelschnitten

$K_1^{(1)}\ K_2^{(2)}\ K_3^{(3)}\ K_4^{(4)}\ K_5^{(5)}\ K_6^{(6)}\ K_7^{(7)}\ K_8^{(8)}$

berührt wird. Jeder Punkt dieser Curve gehört zu einer bestimmten Gruppe $x\, y\, z$

$$1\, x^{(1)}\, y^{(1)},\ 2\, x^{(2)}\, y^{(2)}, \ldots\ldots 7\, x^{(7)}\, y^{(7)},\ 8\, x^{(8)}\, y^{(8)}$$

sind diejenigen speziellen Gruppen, zu denen die Punkte 1 2 3 4 5 6 7 8 gehören.

Ferner lassen sich wieder ähnliche Bemerkungen anknüpfen, wie zu Ende der §§. 5 und 7.

Zu den gegebenen Punkten p 1 2 3 4 5 6 7 8 füge man noch vier willkürlich gewählte $a\, b\, c\, d$. Dann bestimmen die 13 Punkte

$$p\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\, a\, b\, c\, d$$

einen Büschel von Curven vierten Grades C. Jede solche Curve C kann von dem Kegelschnittbüschel $(a\, b\, c\, d)$ in Verbindung mit noch einem andern, zu dessen Grundpunkten p gehört, erzeugt werden. Nennt man die drei übrigen Grundpunkte dieses Büschels $x\, y\, z$, so muss

$$(p\, x\, y\, z)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \barwedge (a\, b\, c\, d)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8$$

werden. Demnach ist der Ort der Gruppen $x\, y\, z$ für alle Curven C die vorhin gefundene Curve C', wenn man die Elemente $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8$ durch die Kegelschnitte $(a\, b\, c\, d)$ 1 2 3 4 5 6 7 8 ersetzt. Ist der Büschel der C gegeben durch irgend zwei specielle Curven C_1 und C_2, welche vom Büschel $(a\, b\, c\, d)$ in Verbindung mit je den Büscheln

$$(p\, x_1\, y_1\, z_1) \text{ und } (p\, x_2\, y_2\, z_2)$$

erzeugt werden, so erzeugen die letzteren auch unter sich projectivischen Büschel die Curve C'.

Die Curven C haben ausser den 13 Punkten

$$p\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,a\,b\,c\,d$$

noch drei andere, $u\,v\,w$, gemeinsam, von diesen kann, wie in den §§. 5 und 7, gezeigt werden, dass sie auf C' liegen. Die Curve C' ist aber durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,u\,v\,w$$

vollkommen bestimmt; ferner sind die zu einer C gehörigen Punkte $x\,y\,z$ die einzigen, welche diese C ausser $p\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,u\,v\,w$ noch mit C' gemeinsam hat. Demnach gilt der Satz:

Ist

$$p\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,a\,b\,c\,d\,u\,v\,w$$

ein System von Punkten, durch welche unendlich viele Curven vierten Grades gehen, und greift man irgend vier Punkte $a\,b\,c\,d$ *und von den übrigen noch einen,* p, *beliebig heraus, so ist durch das System*

$$\overset{2}{p}\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,u\,v\,w$$

eine Curve vierten Grades C' *bestimmt; von den Schnittpunkten irgend einer* C *mit* C' *fallen 13 in die Punkte* $p\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,u\,v\,w$, *die drei übrigen bilden mit* p *die Grundpunkte desjenigen Kegelschnittbüschels, welcher mit* $(a\,b\,c\,d)$ *die* C *erzeugt*).*

§. 10.

Die sechste und letzte Aufgabe, *wenn gegeben sind die Punkte*

$$p\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9$$

und die Elemente

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7\,\alpha_8\,\alpha_9$$

---

*) Hinsichtlich der Construction ist zu bemerken, dass man nicht nur die Punktpaare $x^{(1)}y^{(1)}\ldots\ldots x^{(8)}y^{(8)}$ sondern auch die Paare $h_1 i_1\ldots\ldots h_8 i_8$ und damit projectivische Kegelschnittbüschel, welche die C' erzeugen, vermittelst des Lineals und des Zirkels oder eines festen Kegelschnitts finden kann.

eines einförmigen Gebildes, drei Punkte x y z zu finden, so dass

$$(p\,x\,y\,z)\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \barwedge \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6\,\alpha_7\,\alpha_8\,\alpha_9$$

kann man jetzt folgendermaassen construiren:

Man ersetze die Bestimmungsstücke der vorigen Aufgabe successive durch:

$$\begin{array}{l} p\ \ 2\ 3\ \ldots\ 8\ 9\quad \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_8\ \alpha_9 \\ p\ 1\ \ 3\ \ldots\ 8\ 9\ \alpha_1\quad \alpha_3\ \ldots\ \alpha_8\ \alpha_9 \\ p\ 1\ 2\ \ \ldots\ 8\ 9\ \alpha_1\ \alpha_2\quad \ldots\ \alpha_8\ \alpha_9 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ 8\quad \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_8 \end{array}$$

und construire jedesmal die acht Punktpaare $h\,i$. Auf diese Art erhält man die folgenden neun Systeme von je acht Paaren $h\,i$

$$\begin{array}{lllllll} & h_2^{(1)} i_2^{(1)} & h_3^{(1)} i_3^{(1)} & \ldots & h_8^{(1)} i_8^{(1)} & h_9^{(1)} i_9^{(1)} \\ h_1^{(2)} i_1^{(2)} & & h_3^{(2)} i_3^{(2)} & \ldots & h_8^{(2)} i_8^{(2)} & h_9^{(2)} i_9^{(2)} \\ h_1^{(3)} i_1^{(3)} & h_2^{(3)} i_2^{(3)} & & \ldots & h_8^{(3)} i_8^{(3)} & h_9^{(3)} i_9^{(3)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_1^{(9)} i_1^{(9)} & h_2^{(9)} i_2^{(9)} & h_3^{(9)} i_3^{(9)} & \ldots & h_8^{(9)} i_8^{(9)} & \end{array}$$

Nun bezeichne man die neun Kegelschnitte

$$(p\,x\,y\,z)\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$$

mit

$$K_1\ K_2\ K_3\ K_4\ K_5\ K_6\ K_7\ K_8\ K_9.$$

Dann muss K_1 durch alle Punktpaare $h_1 i_1$, K_2 durch alle Paare $h_2 i_2$ u. s w., endlich K_9 durch alle Paare $h_9 i_9$ gehen.

Durch irgend zwei dieser Kegelschnitte sind aber die Punkte $x\,y\,z$ bestimmt.

Zwei Kegelschnitte, etwa $K_3\ K_4$, sind also zur Construction ausreichend; zu ihrer Bestimmung aber hat man nur vier Punktpaare hi, speziell für $K_3\,K_4$ die Paare

$$h_3^{(1)} i_3^{(1)},\quad h_3^{(2)} i_3^{(2)} \text{ und } h_4^{(1)} i_4^{(1)},\quad h_4^{(2)} i_4^{(2)}$$

nöthig *).

---

*) Das Lineal in Verbindung mit einem festen Kegelschnitt

§. 11.

Es könnte jetzt ohne Weiteres zur Lösung der Hauptaufgabe dieser Abhandlung geschritten werden, da die §§. 5—10 Alles enthalten, was zu dieser Lösung erforderlich ist. Indessen sollen, obgleich dies nicht unbedingt nöthig, der Symmetrie wegen auch hier zwei Aufgaben vorausgeschickt werden, welche sich auf Büschel von Curven vierten Grades mit zwei Doppelpunkten resp. einem solchen Punkt beziehen.

Die erste dieser Aufgaben lautet:

Den Punkt u zu bestimmen, welchen alle durch die gegebenen Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,a\,b\,c$$

gehenden Curven vierten Grades C'' noch mit einander gemein haben.

Auflösung: Soll der Kegelschnittbüschel $(p\,q\,r\,x)$ in Verbindung mit dem Büschel $(p\,q\,a\,c)$ eine Curve C'' erzeugen, soll also

$$(p\,q\,r\,x)\,1\,2\,3\,b \barwedge (p\,q\,a\,c)\,1\,2\,3\,b$$

werden, so ist nach den zu Ende von §. 5 gemachten Bemerkungen der Ort des Punktes x, eine durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,\overset{2}{r}\,1\,2\,3\,b$$

gehende Curve A'''.

Soll aber der Büschel $(pqrx)$ in Verbindung mit $(pqbc)$ eine C'' erzeugen, soll also

$$(p\,q\,r\,x)\,1\,2\,3\,a \barwedge (p\,q\,b\,c)\,1\,2\,3\,a$$

werden, so ist der Ort des Punktes x eine durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,\overset{2}{r}\,1\,2\,3\,a$$

gehende Curve vierten Grades B'''.

Jede der beiden Curven A''' B''' verlangt zu ihrer vollständigen Bestimmung noch einen Punkt, welcher (nach

---

würde zur Bestimmung jener beiden Kegelschnitte ausreichen; der Gebrauch des Zirkels ist erst dann nicht zu vermeiden, wenn es sich um Construction ihrer Schnittpunkte handelt.

Anleitung von §. 5)*) gefunden werden kann. Diese Curven gehen aber (ebenfalls nach §. 5) durch den gesuchten Punkt, welchen sie ausser $p\,q\,r\,1\,2\,3$ noch gemeinsam haben. Somit kommt die Bestimmung von u auf die zu Anfang von §. 6 gelöste Aufgabe zurück**).

§. 12.

Die analoge, auf Büschel von Curven vierten Grades mit einem Doppelpunkt sich beziehende Aufgabe lautet:

Die Punkte $u\;v$ zu finden, welche alle durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,r\,1\,2\,3\,a\,b\,c\,d\,e$$

gehenden Curven vierten Grades C' noch mit einander gemein haben.

Auflösung: Alle Punktpaare $x\,y$, für welche der Büschel $(p\,q\,x\,y)$ mit $(p\,a\,d\,e)$ eine Curve C' erzeugt, für welche also

$$(p\,q\,x\,y)\,r\,1\,2\,3\,b\,c \barwedge (p\,a\,d\,e)\,r\,1\,2\,3\,b\,c,$$

liegen (nach §. 7) auf einer durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,b\,c$$

gehenden Curve vierten Grades A''.

Ebenso liegen alle Punktpaare $x\,y$, für welche $(p\,q\,x\,y)$ mit $(p\,b\,d\,e)$ eine C' erzeugt, für welche also

$$(p\,q\,x\,y)\,r\,1\,2\,3\,c\,a \barwedge (p\,b\,d\,e)\,r\,1\,2\,3\,c\,a$$

auf einer durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,c\,a$$

gehenden Curve vierten Grades B''.

Und endlich liegen alle Punktpaare $x\,y$, für welche $(p\,q\,x\,y)$ mit $(p\,c\,d\,e)$ eine C' erzeugt, für welche also

$$(p\,q\,x\,y)\,r\,1\,2\,3\,a\,b \barwedge (p\,c\,d\,e)\,r\,1\,2\,3\,a\,b.$$

auf einer durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,r\,1\,2\,3\,a\,b$$

*) mit blosser Hülfe des Lineals

**) Sie kann, wie dort bemerkt, mit dem Lineal allein ausgeführt werden.

gehenden Curve vierten Grades C''. Diese drei Curven $A''\ B''\ C''$ müssen (§. 7) auch durch die gesuchten Punkte $u\,v$ gehen und man kann*) von jeder derselben so viele Punkte finden, als zu ihrer völligen Bestimmung noch nöthig sind.

Nun suche man (nach Anleitung von §. 6) einen Punkt x_a^b, so dass der Kegelschnittbüschel $(p\,q\,r\,x_a^b)$ im Verein mit dem Büschel $(p\,q\,3\,a)$ die Curve B' erzeugt. Ebenso suche man einen Punkt x_a^c, so dass der Büschel $(p\,q\,r\,x_a^c)$ mit $(p\,q\,3\,a)$ die C'' erzeugt. Dann sind die zu ein und demselben dritten projectivischen Büschel

$$(p\ q\ r\ x_a^b) \text{ und } (p\ q\ r\ x_a^c)$$

auch untereinander projectivisch und erzeugen eine Curve A''' welche durch die Punkte $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}$, ferner durch sämmtliche gemeinsame Punkte der Curven $B''\ C''$ mit Ausnahme von a und 3, also auch durch die Punkte $1\ 2\ u\ v$ geht (vgl. §. 5). Von dieser Curve A''' können noch so viele Punkte gefunden werden, als ausser den bekannten

$$\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}\ 1\ 2$$

zu ihrer vollständigen Bestimmung noch nöthig sind.

Ganz ebenso können noch zwei andere durch die bekannten Punkte

$$\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}\ 1\ 2$$

und die unbekannten $u\,v$ gehende Curven $B'''\ C'''$ gefunden werden, welche sich zu den Curvenpaaren $C''\ A''$ und $A''\ B''$ geradeso verhalten, wie A''' zum Paare $B''\ C''$, $u\,v$ sind aber die einzigen Punkte, welche $A'''\ B'''\ C'''$ ausser $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}\ 1\ 2$ noch miteinander gemein haben und können demnach vermittelst zweier dieser Curven (nach Anleitung des §. 6) gefunden werden*).

---

*) mit blosser Hülfe des Lineals (§. 7, zu Anfang).

**) Um zu zwei Kegelschnitten zu gelangen, welche durch zwei bekannte Punkte und dann noch durch die beiden zu findenden gehen, bedarf es nur des Lineals. Will man nun einen festen Kegelschnitt anwenden, so reicht das Lineal für die ganze Construction aus.

Die Construction könnte dadurch illusorisch werden, dass die Curven $A''' \; B'' \; C''$ identisch ausfielen. Es ist also noch zu beweisen, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall sein wird.

Bei diesem Beweise kann man die Punkte $u \; v$, welche zwar noch nicht construirt vorliegen, von deren Existenz man aber Gewissheit hat, als bekannt voraussetzen.

Die Curven $A''' \; B''' \; C'''$ gehören alle demselben von den Punkten $\overset{2}{p} \; \overset{2}{q} \; \overset{2}{r} \; 1 \; 2 \; u \; v$ bestimmten Büschel an. Bildet man vermittelst irgend eines Punktes x die Gruppe der Kegelschnitte

$$(p \; q \; r \; x) \; 1 \; 2 \; u \; v,$$

so bleibt diese Gruppe sich selbst projectivisch, wenn sich x auf einer Curve jenes Büschels fortbewegt, dagegen hört sie auf zu sich selbst projectivisch zu sein, sobald x von einer solchen Curve auf eine andere übergeht (vgl. §. 5). Nun ist für alle Punkte x auf A'''

$$(p \; q \; r \; x) \; 1 \; 2 \; u \; v \barwedge (p \; q \; 3 \; a) \; 1 \; 2 \; u \; v$$

für alle x auf B'''

$$(p \; q \; r \; x) \; 1 \; 2 \; u \; v \barwedge (p \; q \; 3 \; b) \; 1 \; 2 \; u \; v,$$

für alle x auf C'''

$$(p \; q \; r \; x) \; 1 \; 2 \; u \; v \barwedge (p \; q \; 3 \; c) \; 1 \; 2 \; u \; v.$$

Sollen demnach etwa $A''' \; B'''$ zusammenfallen, so muss

$$(p \; q \; 3 \; a) \; 1 \; 2 \; u \; v \barwedge (p \; q \; 3 \; b) \; 1 \; 2 \; u \; v$$

sein. Dann aber müssten die Punkte $a \; b$ derselben durch

$$\overset{2}{p} \; \overset{2}{q} \; \overset{2}{3} \; 1 \; 2 \; u \; v$$

gehenden Curve angehören.

Man hat sich aber unter

$$\overset{2}{p} \; q \; r \; 1 \; 2 \; 3 \; a \; b \; c \; d \; e \; u \; v$$

die allgemeinste Gruppe von Punkten zu denken, durch welche eine Schaar von Curven C' geht. Ausser dem Doppelpunkt p kann man noch zehn Punkte einer solchen Gruppe willkürlich annehmen. Es werden also auch zwischen dem Doppelpunkt und zehn ad libitum herausgegriffe-

nen andern Punkten (hier $q\,r\,1\,2\,3\,a\,b\,c\,u\,v$) im Allgemeinen keinerlei Relationen existiren und also werden auch die Punkte a und b im Allgemeinen nicht auf derselben durch $\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\,\overset{2}{r}\,u\,v$ gehenden Curve liegen. Dann aber sind, wie gezeigt, die Curven A''' und B''' auch nicht identisch.

§. 13.

Es bleibt jetzt die Haupt-Aufgabe, nämlich
die drei Punkte $u\,v\,w$ zu construiren, welche alle durch 13 gegebene Punkte

$$p\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b\,c\,d\,e\,f$$

gehenden Curven vierten Grades C noch miteinander gemein haben.

Auflösung: Der Ort aller Gruppen je dreier Punkte $x\,y\,z$, für welche die Kegelschnittbüschel $(p\,x\,y\,z)$ und $a\,d\,e\,f$ eine der Curven C erzeugen, für welche also:

$$(p\,x\,y\,z)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,b\,c \barwedge (a\,d\,e\,f)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,b\,c$$

ist eine durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,b\,c$$

gehende Curve vierten Grades A' (vgl. §. 9, zu Ende).

Ebenso ist, wenn der Büschel $(p\,x\,y\,z)$ mit $(b\,d\,e\,f)$ eine C erzeugen soll, wenn also:

$$(p\,x\,y\,z)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,c\,a \barwedge (b\,d\,e\,f)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,c\,a$$

werden soll, der Ort aller Gruppen $x\,y\,z$ eine Curve vierten Grades B', welche durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,c\,a$$

geht.

Und soll endlich der Büschel $(p\,x\,y\,z)$ mit $(c\,d\,e\,f)$ eine C erzeugen, so dass

$$(p\,x\,y\,z)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b \barwedge (c\,d\,e\,f)\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b$$

werden muss, so ist der Ort der Gruppen $x\,y\,z$ eine durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b$$

gehende Curve vierten Grades C'.

Die genannten Punkte, durch welche die Curven $A' B' C'$ gehen müssen, bestimmen diese Curven nicht vollständig, man kann aber (§. 9) für jede dieser Curven zwei sie erzeugende Kegelschnittbüschel und damit noch so viele reelle (je zwei einander entsprechende Kegelschnitte der erzeugenden Büschel haben einen reellen bekannten Punkt x und also auch noch einen zweiten reellen Punkt mit einander gemein) Punkte finden, als zur völligen Bestimmung nöthig sind*).

Nun suche man (nach §. 8) ein Punktpaar $x_a^b y_a^b$ so, dass die Kegelschnittbüschel $(p\, q\, x_a^b\, y_a^b)$ und $(p\, 3\, 4\, a)$ die B' erzeugen, ferner ein Punktpaar $x_a^c\, y_a^c$ so, dass der Büschel $(p\, q\, x_a^c\, y_a^c)$ mit $(p\, 3\, 4\, a)$ die C' erzeugt. Dann sind die zu ein und demselben dritten projectivischen Büschel

$$(p\, q\, x_a^b\, y_a^b) \text{ und } (p\, q\, x_a^c\, y_a^c)$$

auch unter sich projectivisch und erzeugen eine Curve A'', welche durch $\overset{2}{p}\, \overset{2}{q}$ und die sämmtlichen Schnittpunkte von B' und C' mit Ausnahme von $3\, 4\, a$, also auch durch $r\, 1\, 2\, u\, v\, w$ (§. 7, zu Ende) geht.

Auf dieselbe Art suche man noch zwei andere, durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\, \overset{2}{q}\, r\, 1\, 2\, u\, v\, w$$

gehende, Curven $B''\, C''$, von denen B'' zu dem Curvenpaar $C'\, A'$, C'' zu dem Curvenpaar $A'\, B'$ in demselben Verhältniss

*) Die im §. 9 mit $x^{(1)}y^{(1)} \ldots\ldots x^{(8)}y^{(8)}$ und $h_1 i_1 \ldots\ldots h_8 i_8$ bezeichneten Punktpaare, welche auf der fraglichen Curve liegen, können mit Hülfe des Lineals und eines festen Kegelschnitts gefunden werden. Sind unter diesen Punktpaaren mindestens zwei reelle, so kann man aus ihnen die drei zur völligen Bestimmung der A' resp. B', C' noch nöthigen reellen Punkte nehmen. Ist dies nicht der Fall, so erfordert die Auffindung solcher Punkte schon hier die Anwendung des Zirkels und des festen Kegelschnitts, eine Unvollkommenheit der Construction, welche ich nicht zu heben vermag.

steht, wie A'' zu $B' C'$. Die Curven $A'' B'' C''$ sind durch die bekannten Punkte $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ r\ 1\ 2$ wieder nicht völlig bestimmt, man kann aber von jeder leicht noch so viele reelle Punkte finden, als zur völligen Bestimmung erforderlich sind, da man für jede zwei sie erzeugende Kegelschnittbüschel hat*).

Weiter suche man (nach §. 6) drei Punkte $x_a\ x_b\ x_c$, so, dass der Büschel $(p q 1 2)$ mit $(p q r x_a)$ die A'', mit $(p q r x_b)$ die B'', mit $(p\ q\ r\ x_c)$ die C'' erzeugt. Dann erzeugen die zu einem und demselben dritten und also auch zu einander projectivischen Büschel

$$(p\ q\ r\ x_b) \text{ und } (p\ q\ r\ x_c)$$

eine Curve vierten Grades A''', welche durch $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}$ und durch sämmtliche Schnittpunkte von B'' und C'', ausser 12, geht, also auch durch $u\ v\ w$ (§. 5, zu Ende). Zwei andere Curven B''', C''', welche durch $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}\ u\ v\ w$ gehen, werden in derselben Weise durch je die projectivischen Büschel

$$(p\ q\ r\ x_c),\ (p\ q\ r\ x_a)$$

und

$$(p\ q\ r\ x_a),\ (p\ q\ r\ x_b)$$

erzeugt. Von jeder dieser Curven können leicht noch so viele reelle Punkte gefunden werden, als zu ihrer völligen Bestimmung nöthig sind.

Es seien nun

$$\alpha_a\ \beta_a\ \gamma_a\ \delta_a\ \varepsilon_a,\ \alpha_b\ \beta_b\ \gamma_b\ \delta_b\ \varepsilon_b,\ \alpha_c\ \beta_c\ \gamma_c\ \delta_c\ \varepsilon_c$$

die drei Gruppen von je fünf Punkten, welche in Verbindung mit $\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}$ die Curven $A'''\ B'''\ C'''$ völlig bestimmen. Zu ihnen suche man (nach der im Anfang des §. 5 entwickelten Methode) die entsprechenden:

$$\alpha'_a\ \beta'_a\ \gamma'_a\ \delta'_a\ \varepsilon'_a,\ \alpha'_b\ \beta'_b\ \gamma'_b\ \delta'_b\ \varepsilon'_b,\ \alpha'_c\ \beta'_c\ \gamma'_c\ \delta'_c\ \varepsilon'_c$$

*) Um sicher einander, ausser in p und q, reell schneidende Paare von Kegelschnitten zu erhalten, braucht man nur diese Paare nahe genug bei den durch die bekannten reellen Punkte $r\ 1\ 2$ gehenden anzunehmen.

Diese drei Gruppen bestimmen drei Kegelschnitte, welche wieder ihrerseits zu je zwei und zwei genommen drei Kegelschnittbüschel bestimmen. Durch einen beliebig angenommenen Punkt m' gehen nun drei Kegelschnitte, welche resp. diesen Büscheln angehören, diese haben ausser m' noch dieselben drei Punkte u' v' w' mit einander gemein: die den Punkten u' v' w' entsprechenden aber sind die gesuchten u v w *).

---

*) Es ist wohl zu beachten, dass man, wenn zweimal fünf Punkte gegeben sind, welche zwei Kegelschnitte K und K_1 definiren, ohne die Schnittpunkte von K und K_1 zu kennen, mit Hülfe des Lineals und eines festen Kegelschnitts beliebig viele Punkte eines dem Büschel $(K K_1)$ angehörigen und durch einen gegebenen Punkt m gehenden Kegelschnitts M finden kann. Zieht man nämlich durch m eine beliebige Gerade, so findet man den zweiten Schnitt dieser Geraden mit M folgendermaassen: Man suche zwei Paare von jeder der beiden Polarinvolutionen, welche K und K_1 auf der Geraden bestimmen (mit Hülfe des Lineals). Diese beiden Involutionen haben entweder ein (reelles) Paar gemeinsam (welches man mit Hülfe des Lineals und des festen Kegelschnitts findet), alsdann ist der gesuchte Punkt der vierte harmonische zu m in Bezug auf dieses Paar. Oder sie haben kein Paar gemeinsam. Dann haben sie beide Doppelpunkte, diese bilden eine Involution, in welcher der gesuchte Punkt zu m gehört.

Natürlich kann man, um die Punkte u' v' w' zu finden, die in der ersten Abhandlung auseinandergesetzte Methode anwenden. Zwei dieser Punkte, etwa v' w', können conjugirt imaginär werden. Alsdann liefert die Construction eine Gerade und auf dieser eine die Punkte v' w' vertretende Involution ohne Doppelpunkte. Die Punkte v w aber ergeben sich folgendermaassen: Es seien h' i', k' l' zwei Paare jener Involution. Man suche die Punkte h i, k l, diese liegen mit p q r auf einem Kegelschnitt; man ziehe nun die Verbindungslinien h i, k l und suche die Polare ihres Schnittpunkts in Bezug auf jenen Kegelschnitt, so wie die auf dieser Polaren vom Kegelschnitt bestimmte Polarinvolution: diese hat keine Doppelpunkte und vertritt das Paar v w. Die Richtigkeit dieser Construction liegt auf der Hand, sobald man für v' w' ein reelles Punktpaar nimmt; daraus

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass diese Construction im Allgemeinen nicht dadurch illusorisch wird, dass die drei Curven A''' B''' C''' zusammenfallen oder demselben Büschel angehören.

Hierbei können wieder die Punkte $u\,v\,w$, von denen man ja weiss, dass sie existiren, als bekannt angenommen werden.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Curven A' B' C' weder zusammenfallen noch demselben Büschel angehören. Man kann nämlich diese Curven als durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,u\,v\,w$$

und resp. die Punkte

$$b\,c,\quad c\,a,\quad a\,b$$

bestimmt ansehn. Nun müssten, damit die Curven A' B' C' zusammenfielen oder demselben Büschel angehörten, zwischen den 13 Punkten

$$p\,q\,r\,1\,2\,3\,4\,a\,b\,c\,u\,v\,w$$

ganz besondere Relationen stattfinden, dies wird aber im Allgemeinen nicht der Fall sein, da man es hier mit dem allgemeinsten System von 16 Punkten zu thun hat, durch welche eine Schaar von Curven vierten Grades geht, und da von diesen 16 Punkten 13 (hier die oben aufgezählten) beliebig angenommen werden können. Nicht so einfach ist es, zu zeigen, dass auch die Curven A'' B'' C'' im Allgemeinen weder zusammenfallen, noch demselben Büschel angehören werden.

Da die Curve A'' von zwei Kegelschnittbüscheln

$$(p\,q\,x_a^b\,y_a^b) \text{ und } (p\,q\,x_a^c\,y_a^c)$$

erzeugt wird, von denen der erste seinerseits mit dem Büschel

$$(p\,3\,4\,a)$$

die B' und der andere mit demselben Büschel $(p\,3\,4\,a)$ die C' erzeugt, da ferner die Punkte $r\,1\,2\,u\,v\,w$ beiden Curven

---

aber folgt ihre Anwendbarkeit auch im imaginären Falle vermöge der zu Anfang des folgenden Paragraphen über die v. Staudt'schen Arbeiten gemachten Bemerkungen.

$B' C'$ angehören, so lässt sich die A'' auffassen als der Ort aller Paare von Punkten $x y$, für welche

$$(p\, q\, x\, y)\, r\, 1\, 2\, u\, v\, w \barwedge (p\, 3\, 4\, a)\, r\, 1\, 2\, u\, v\, w$$

(vgl. §. 7). Eine ganz ähnliche Auffassung lassen die Curven $B'' C''$ zu, der einzige Unterschied ist, dass an Stelle des Punktes a successive die Punkte b, c treten. Diese Punkte b, c und mit ihnen die Curven $B'' C''$ betrachte man nun als fest, dagegen den Punkt a als veränderlich. Mit dem Punkte a ist die A'' völlig bestimmt und es können b, c als spezielle Lagen von a angesehen werden. Fielen nun im Allgemeinen die drei Curven $A'' B'' C''$ zusammen, so würde sich die Curve A'' überhaupt nicht ändern, wenn a andere und andere Lagen annimmt; gehörten $A'' B'' C''$ im Allgemeinen demselben Büschel an, so könnte sich A'' allerdings mit a ändern, würde jedoch nie aufhören, demselben (durch $B'' C''$ bestimmten) Büschel anzugehören. Man hat demnach nur zu zeigen, dass es überhaupt drei Lagen von a gibt, für welche die zugehörigen Curven A'' weder identisch sind, noch demselben Büschel angehören.

Bei diesem etwas umständlichen Beweise sollen der Uebersichtlichkeit halber für einen Augenblick den Punkten

$$r\, 1\, 2\, u\, v\, w\, 3\, 4$$

die andern Namen

$$\mathrm{I\ II\ III\ IV\ V\ VI}\, m\, n$$

gegeben werden. Ferner seien

$$x_{\mathrm{I}}\, x_{\mathrm{II}}\, x_{\mathrm{III}}\, x_{\mathrm{IV}}\, x_{\mathrm{V}}\, x_{\mathrm{VI}}$$

die sechs Punkte, für welche

$$(pq\,\mathrm{I}\,x_{\mathrm{I}}\,)\ \mathrm{II\ III\ IV\ V\ VI} \barwedge (p\,m\,n\,a)\ \mathrm{II\ III\ IV\ V\ VI}$$
$$(pq\,\mathrm{II}\,x_{\mathrm{II}})\ \mathrm{I\ \ III\ IV\ V\ VI} \barwedge (p\,m\,n\,a)\ \mathrm{I\ \ III\ IV\ V\ VI}$$
$$(pq\,\mathrm{III}\,x_{\mathrm{III}})\ \mathrm{I\ II\ \ IV\ V\ VI} \barwedge (p\,m\,n\,a)\ \mathrm{I\ II\ \ IV\ V\ VI}$$

. . . .

. . . .

$$(pq\,\mathrm{VI}\,x_{\mathrm{VI}})\ \mathrm{I\ II\ III\ IV\ V} \barwedge (p\,m\,n\,a)\ \mathrm{I\ II\ III\ IV\ V}$$

Diese sechs Punkte liegen auf A''. Ausserdem wird die

A'' im Punkte I von dem zum Büschel $(p\,q\,\mathrm{I}\,x_{\mathrm{I}})$ gehörigen und dem $(p\,m\,n\,a\,\mathrm{I})$ entsprechenden Kegelschnitt K_{I}, im Punkte II von dem zu $(p\,q\,\mathrm{II}\,x_{\mathrm{II}})$ gehörigen und dem $(p\,m\,n\,a\,\mathrm{II})$ entsprechenden Kegelschnitt K_{II}, u. s. w. berührt (vgl. §. 7).

Man denke sich jetzt den Punkt a auf der durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{m}\,\overset{2}{n}\;\mathrm{II}\;\mathrm{III}\;\mathrm{IV}\;\mathrm{V}\;\mathrm{VI}$$

bestimmten Curve P_{I}''' und lasse ihn auf dieser Curve sich bewegen. Unter a_1 verstehe man irgend eine specielle feste Lage dieses Punktes auf der P_{I}'''. Von den Schnittpunkten des Kegelschnitts $(p\,m\,n\,\mathrm{I}\,a)$ mit der P_{I}''' fallen sechs in die Punkte $p\,m\,n$, einer in den Punkt a, den einzigen noch übrigen nenne man s. Dieser Punkt s ändert sich mit a, und zwar wird er, wenn a die ganze P_{I}''' durchläuft, ebenfalls jede Lage auf P_{I}''' einmal und nur einmal annehmen. Demnach wird auch der Kegelschnitt $(p\,m\,n\,a_1\,s)$, von dessen acht Schnittpunkten mit P_{I}''' sechs in die Punkte $p\,m\,n$, zwei in $a_1\,s$ fallen, wenn a die P_{I}''' beschreibt, den Büschel $(p\,m\,n\,a_1)$ in der Weise durchlaufen, dass zu jeder Lage von a auf P_{I}''' ein Kegelschnitt dieses Büschels und umgekehrt zu jedem Kegelschnitt eine und nur eine Lage von a auf P_{I}''' gehört. Da man nun für jede Lage von a auf P_{I}''' diese Curve als durch die Kegelschnittbüschel

$$(p\,m\,n\,a_1) \text{ und } (p\,m\,n\,a)$$

erzeugt ansehn darf, so wird man fortwährend haben

$$(p\,m\,n\,a)\,s\;\mathrm{II}\;\mathrm{III}\;\mathrm{IV}\;\mathrm{V}\;\mathrm{VI} \;\overline{\wedge}\; (p\,m\,n\,a_1)\,s\;\mathrm{II}\;\mathrm{III}\;\mathrm{IV}\;\mathrm{V}\;\mathrm{VI}$$

und man kann bei Construction des Punktes x_{I} (§. 6) und des Kegelschnitts K_{I} (§. 7) die Elemente $\alpha_1\;\alpha_2\;\alpha_3\;\alpha_4\;\alpha_5\;\alpha_6$ durch die Kegelschnitte

$$(p\,m\,n\,a_1)\,s\;\mathrm{II}\;\mathrm{III}\;\mathrm{IV}\;\mathrm{V}\;\mathrm{VI}$$

ersetzen. Hieraus ergiebt sich zunächst, dass der Punkt x_{I} sich mit a nicht ändern wird, dann aber ferner, und darauf

kommt es hier besonders an, dass der Kegelschnitt K_I, der ja in der durch

$$(p\,q\,\mathrm{I}\,x_I)\ \mathrm{II\ III\ IV\ V\ VI}\ \overline{\wedge}\ (p\,m\,n\,a_1)\ \mathrm{II\ III\ IV\ V\ VI}$$

bestimmten projectivischen Beziehung zwischen den Büscheln

$$(p\,q\,\mathrm{I}\,x_I) \text{ und } (p\,m\,n\,a_1)$$

dem $(p\,m\,n\,a_1\,s)$ entspricht, alle Lagen im Büschel $(p\,q\,\mathrm{I}\,x_I)$ einmal und nur einmal annehmen wird, wenn a die P_I''' durchläuft. Wenn aber K_I im Büschel $(p\,q\,\mathrm{I}\,x_I)$ jede Lage einmal und nur einmal annimmt, so wird seine Tangente im Punkte I successive mit allen Strahlen dieses Punktes und mit jedem nur einmal zusammenfallen; durch diese Tangente und die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\ \mathrm{I\ II\ III\ IV\ V\ VI}\ x_I$$

ist die Curve A'' völlig bestimmt und demnach hat man das Resultat:

Wenn der Punkt a die durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{m}\,\overset{2}{n}\ \mathrm{II\ III\ IV\ V\ VI}$$

bestimmte Curve vierten Grades P_I''' beschreibt, so beschreibt gleichzeitig die Curve A'' den durch die Punkte

$$\overset{2}{p}\,\overset{2}{q}\ \mathrm{I\ II\ III\ IV\ V\ VI}\ x_I$$

bestimmten Büschel und zwar so, dass zu jeder Lage von a auf P_I''' eine Curve dieses Büschels gehört und umgekehrt zu jeder Curve des Büschels eine Lage von a*).

Auf dieselbe Weise erhält man noch fünf ähnliche Resultate, in denen die Punkte II III IV V VI successive die Rolle des Punktes I übernehmen.

So erhält man sechs im Allgemeinen von einander ver-

*) Man hätte sogar zeigen können, dass der Punkt a und die Curve A'' projectivisch zu einander sind, ich habe dies nicht gethan, um nicht von der projectivischen Beziehung der Punkte einer Curve vierten Grades mit drei Doppelpunkten auf irgend ein anderes Gebilde sprechen zu müssen.

schiedene Büschel, denen A'' angehören kann, und es ist somit leicht möglich, dem Punkt a drei solche Lagen anzuweisen, dass die drei zugehörigen Curven A'' weder identisch sind, noch demselben Büschel angehören.

Jetzt ist es leicht nachzuweisen, dass auch die Curven A''' B''' C''' im Allgemeinen weder identisch sind, noch demselben Büschel angehören. Man kann diese Curven als durch

$$\overset{2}{p}\ \overset{2}{q}\ \overset{2}{r}\ u\ v\ w$$

und je die beiden Punkte

$$x_b\, x_c,\ x_c\, x_a,\ x_a\, x_b$$

bestimmt ansehn. Zunächst kann von den Punkten $x_a\, x_b\, x_c$ keiner mit dem andern zusammenfallen, denn sonst wären auch die beiden entsprechenden der drei Curven A'' B'' C'' identisch. Es kann aber auch der Punkt x_a nicht auf der Curve A''' liegen. Denn diese Curve ist ihrer Entstehungsweise nach der Ort der vierten Grundpunkte x derjenigen Kegelschnittbüschel $(p\,q\,r\,x)$, welche mit $(p\,q\,1\,2)$ (hier gilt wieder die frühere Bezeichnungsweise) die Curven des von B'' C'' bestimmten Büschels erzeugen (§. 5). Läge also x_a auf der A''', so gehörten A'' B'' C'' demselben Büschel an, was, wie gezeigt, im Allgemeinen nicht der Fall ist. Wenn aber x_a nicht auf der A''' liegt, so sind die Curven A''' B''' C''' nicht identisch und gehören auch nicht demselben Büschel an, da B''' C''' durch x_a gehen*).

---

*) Durch Permutation der gegebenen Punkte

$$1\,2\,3\,4\,a\,b\,c\,d\,e\,f$$

in der entwickelten Construction kann man zu noch vielen andern Curven vierten Grades mit den Doppelpunkten $p\ q\ r$ gelangen, welche durch die gesuchten Punkte $u\ v\ w$ gehen. Vielleicht würde bei einer andern Auswahl von dreien dieser Curven der Beweis dafür, dass die Construction nicht illusorisch wird, sich einfacher gestalten.

Zum Schluss noch einige Bemerkungen:

Bei allen behandelten Aufgaben sind die gegebenen Punkte als reell angenommen und für diesen Fall die Constructionen so durchgeführt worden, dass nirgendwo das Imaginäre störend dazwischen tritt. Alles gilt aber auch dann noch, wenn die gegebenen Bestimmungsstücke zum Theil oder alle imaginär werden, und zwar brauchen diese Stücke nicht zu je zwei conjugirt imaginär zu sein, sondern es können auch einzelne imaginäre Punkte, Kegelschnitte u. s. w. auftreten. Nur die Bemerkungen über die in jedem Falle zureichenden Constructionsmittel sind hiervon ausgeschlossen; wo nämlich im reellen Falle das Lineal ausreicht, wird man im imaginären noch den Zirkel oder einen festen Kegelschnitt zu Hülfe nehmen müssen; in allen Fällen aber kommt man mit dem Lineal, dem Zirkel und einem festen Kegelschnitt zurecht.

Es hat nämlich v. Staudt, nachdem er für einzelne imaginäre Punkte, Geraden, Ebenen, Kegelschnitte zweckmässige Definitionen aufgestellt, alle fundamentalen Sätze über diese Gebilde auch für den imaginären Fall bewiesen und damit die Unterscheidung des Reellen und Imaginären in diesem Theile der Geometrie aufgehoben*). Nun erstrecken sich v. Staudt's Untersuchungen allerdings nicht auf Curven vierten Grades. Allein man kann diese Curven durch projectivische Kegelschnittbüschel definiren und wenn auch noch keine Theorie derselben existirt, welche alle Eigenschaften aus dieser Definition ableitet, so ist es doch zweifellos, dass eine solche Ableitung möglich ist. So aufgebaut, würde sich die Theorie der Curven vierten Grades ohne Weiteres auf den imaginären Fall übertragen und man ist deshalb vollkommen berechtigt, die im Anfang dieser Abhandlung gemachten Voraussetzungen und damit Alles andere auch dann

---

*) Vgl. die beiden ersten Hefte der »Beiträge zur Geometrie der Lage«.

noch als richtig anzusehen, wenn die bestimmenden Stücke der einzelnen Curven oder Curvenbüschel imaginär werden.

Wenn nun auf diese Weise der Unterschied zwischen dem Imaginären und Reellen theoretisch betrachtet wegfällt, so liegt die Sache praktisch ganz anders. Die allereinfachsten Operationen, wie das Ziehen der zwei gegebene Punkte verbindenden Geraden, werden nämlich, sobald die gegebenen Stücke imaginär sind, schon sehr verwickelt, es würde daher die im reellen Falle ganz elegante Construction einer Aufgabe eine ausserordentliche Weitläufigkeit bekommen, wenn man sie ohne weiteres auf den imaginären Fall übertrüge. Diese Weitläufigkeit ist aber in der Sache selbst nicht begründet, denn in allen praktischen Fällen werden nur conjugirt imaginäre Bestimmungsstücke auftreten und es müssen sich also alle mit imaginären Elementen vorzunehmenden Operationen überhaupt vermeiden lassen. Daher stellt sich der in der Theorie eliminirte Unterschied zwischen dem Reellen und Imaginären in der Praxis von selbst wieder ein, und es wird hier nöthig, besondere Constructionen für die verschiedenen möglichen Fälle aufzustellen, welche entstehen, wenn gewisse Bestimmungsstücke einer Aufgabe conjugirt imaginär werden.

Der Verfasser würde versucht haben, für die hier behandelten Aufgaben diese Lücke auszufüllen, wenn ihm nicht die Zeit dazu gefehlt hätte.

Bonn, Druck von Carl Georgi.